# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

*Seduta del 15 aprile 1923.*

V. VOLTERRA, Vicepresidente.


## MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Geometria.** — *Relazioni tra le due falde focali di una congruenza W. Composizione di 2 trasformazioni W.* Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI.

1 Conservando le notazioni di una Nota precedente [1] ci proponiamo di determinare gli elementi della seconda falda focale, che indicheremo con $H_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ ecc.

Dalle (16) si trae:

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} - \dfrac{H_u}{H}\dfrac{\partial x_1}{\partial u} + \beta\dfrac{\partial x_1}{\partial v} - P x_1 = S x \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} - \dfrac{H_v}{H}\dfrac{\partial x_1}{\partial v} + \gamma\dfrac{\partial x_1}{\partial u} - Q x_1 = T x \end{cases}$$

ove:

$$(18)\qquad \begin{cases} S = \mu_{uu} - \dfrac{H_u}{H}\mu_u + \beta\mu_v - P\mu + 4B\beta q + 4p A_u + 2A p_u + 2B p_v, \\ T = \mu_{vv} - \dfrac{H_v}{H}\mu_v + \gamma\mu_u - Q\mu + 4A\gamma p + 4q B_v + 2B q_u + 2A q_u. \end{cases}$$

Dalle (8) e (16) si trae:

$$(19)\qquad 2A\frac{\partial x_1}{\partial u} - 2B\frac{\partial x_1}{\partial v} + \lambda x_1 = N x$$

[1] *La teoria proiettiva delle congruenze W.* Questi Rendiconti, vol XXXII, 5° fascicolo, 1° semestre 1923.

Sostituendo in (17) alla $x$ il valore dedotto da (19) si trova che:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \log H_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} - p_1 x_1 = 0$$

(e analoga scambiando $u, p, \beta$ con $v, q, \gamma$)

ove:

$$\frac{\partial \log H_1}{\partial u} = \frac{\partial \log H}{\partial u} + 2A\frac{S}{N} \quad ; \quad \beta_1 = -\beta - 2B\frac{S}{N} \quad ; \quad p_1 = P + \frac{\lambda S}{N}$$

ossia, per la (I) della Nota precedente:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} S = \dfrac{1}{2A} N_u & T = -\dfrac{1}{2B} N_v \\ \beta + \beta_1 = -\dfrac{B}{A}\dfrac{N_u}{N} & \gamma + \gamma_1 = -\dfrac{A}{B}\dfrac{N_v}{N} \\ p_1 = P + \dfrac{\lambda}{2A}\dfrac{N_u}{N} & q_1 = Q - \dfrac{\lambda}{2B}\dfrac{N_v}{N} \end{cases}.$$

La (19) si può scrivere:

$$\text{(19-}^{bis}\text{)} \qquad x = 2A'\frac{\partial x_1}{\partial u} + 2B'\frac{\partial x_1}{\partial v} + \mu' x_1$$

ove:

$$\text{(III)} \qquad A' = \frac{A}{N} = AN', \; B' = -\frac{B}{N} = -BN', \; \mu' = \frac{\lambda}{N} =$$

$$= \lambda N', \; \lambda' = \frac{\mu}{N} = \mu N, \; N' = \frac{H}{H_1} = \frac{1}{N},$$

donde:

$$\text{(10-}^{bis}\text{)} \qquad A'_v = -B'\gamma_1 \quad , \quad B'_u = -A'\beta_1 .$$

*Dunque, se partiamo dalla seconda falda focale, la congruenza si determina sostituendo alle* A, B *ecc, le* A′, B′ *ecc. definite da* (III).

Cosicchè, insieme alle ultime (II) varrà p. es. la:

$$p = P_1 + \frac{\lambda'}{2A'}\frac{N'_u}{N'} = P_1 - \frac{\mu}{2A}\frac{N_u}{N}$$

che confrontata con analoga delle (II) dà:

$$p + p_1 = P + P_1 + \frac{\lambda - \mu}{2A}\frac{N_u}{N}.$$

Sostituendo alla P il suo valore (5) ed alla $P_1$ il valore analogo:

$$P_1 = p_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + \beta_1 \frac{\partial \log H_1}{\partial v},$$

si trova per (II):

$$(20)\qquad \begin{cases} N_{uv} + \frac{B}{A}\gamma N_u + \frac{A}{B}\beta N_v = 0\,, \text{ ossia:} \\ \left(\frac{1}{A}N_u\right)_v = -\beta\frac{N_v}{B}\quad,\quad \left(\frac{N_v}{B}\right)_u = -\gamma\frac{N_u}{N}\,. \end{cases}$$

*Le equazioni* (II) *sono evidentemente semplicissime.*

*Esse danno il mezzo di calcolare gli elementi di una falda focale di una congruenza W in funzione di quelli dell'altra; le* (10) *sono le sole equazioni, alla cui integrazione è ridotta la ricerca delle congruenze W, di cui è data una falda focale. Esse si possono unire alle* (11), (12), (15), (20), *quando si considerino* $\lambda$, $\mu$, N *come incognite ausiliarie. Le trattazioni metriche partono invece dalla considerazione della* $\mu$.

*Composizione di due trasform. W.*

**2.** Due superficie, come le S, $S_1$, falde focali di una stessa congruenza W, diconsi trasformate W l'una dell'altra. Noi indicheremo d'ora in poi con $A_1$, $B_1$ ecc. le quantità finora indicate con A, B, ecc. E, se $S_2$ è un'altra trasformata W di S, indicheremo con $A_2$, $B_2$ ecc. i relativi valori delle A, B, ecc. Ora, qualunque sieno le costanti $z_1$, $z_2$, anche $A = z_1 A_1 + z_2 A_2$, $B = z_1 B_1 + z_2 B_2$ soddisfano alle (10) e perciò determinano una congruenza W. Il relativo valore di N sarà dato da:

$$N = z_1^2 N_1 + z_1 z_2 N_{12} + z_2^2 N_2$$

ove sia posto

$$(21)\quad N_{12} = N_{21} = \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + 2A_1\frac{\partial\mu_2}{\partial u} + 2A_2\frac{\partial\mu_1}{\partial u} - 2B_1\frac{\partial\mu_2}{\partial v} - 2B_2\frac{\partial\mu_1}{\partial v} + 8pA_1A_2 - 8qB_1B_2\,.$$

Per la prima delle (II) (essendo $\mu$, S, T ecc. lineari nelle $z$ e quindi p. es. $S = z_1 S_1 + z_2 S_2$):

$$\frac{1}{2A}\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{1}{2(z_1A_1 + z_2A_2)}\left(z_1^2\frac{\partial N_1}{\partial u} + z_1z_2\frac{\partial N_{12}}{\partial u} + z_2^2\frac{\partial N_2}{\partial u}\right) =$$

$$= S = z_1S_1 + z_2S_2 = \frac{z_1}{2A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u} + \frac{z_2}{2A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u}\text{, cioè:}$$

$$(22)\qquad \frac{\partial N_{12}}{\partial u} = \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u} + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u}\,.$$

Introduciamo due funzioni $\omega$, $\Omega$ ponendo:

$$(23)\qquad \begin{cases} \omega + \Omega = N_{12} \\ \omega_u = \dfrac{A_2}{A_1}\dfrac{\partial N_1}{\partial u} \qquad \text{e quindi} \qquad \Omega_u = \dfrac{A_1}{A_2}\dfrac{\partial N_2}{\partial u} \\ \omega_v = \dfrac{B_2}{B_1}\dfrac{\partial N_1}{\partial v} \qquad\qquad\qquad \Omega_v = \dfrac{B_1}{B_2}\dfrac{\partial N_2}{\partial v} \end{cases}.$$

La illimitata integrabilità delle equazioni in $\omega_u$, $\omega_v$ si deduce immediatamente, osservando che, in virtù di (20), da entrambe si deduce:

$$(23^{-bis})\qquad \omega_{uv} = -\frac{A_2\beta}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial v} - \frac{B_2\gamma}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u}$$

Poniamo:

$$(24)\qquad \begin{cases} x_{12} = \omega x + \left(-\lambda_2 x_1 - 2A_2\dfrac{\partial x_1}{\partial u} + 2B_2\dfrac{\partial x_1}{\partial v}\right) \\ x_{21} = \Omega x + \left(-\lambda_1 x_2 - 2A_1\dfrac{\partial x_2}{\partial u} + 2B_1\dfrac{\partial x_2}{\partial v}\right) \end{cases}.$$

Sostituendo alle $x_i$ i valori dati da (8), (16) si trova che:

$$x_{12} + x_{21} = x(\omega + \Omega - N_{12}) = 0$$

cioè *che i punti* $x_{12}$ *ed* $x_{21} = -x_{12}$ *coincidono* (essendo le $x$ coordinate omogenee).

Per le (19) si può anche scrivere:

$$(24^{-bis})\qquad x_{12} = x_1\left(-\lambda_2 + \lambda_1\frac{\omega}{N_1}\right) + \frac{\partial x_1}{\partial u}\left(-2A_2 + 2\frac{A_1}{N_1}\omega\right) + \\ + \frac{\partial x_1}{\partial v}\left(2B_2 - \frac{2B_1}{N_1}\omega\right)$$

insieme all'analoga per $x_{21}$.

*Queste equazioni dicono che* $x_{12} = -x_{21}$ *giace sia sul piano tangente ad* $S_1$ *nel punto* $x_1$ *corrispondente, che sul piano tangente ad* $S_2$ *nel corrispondente punto* $x_2$.

Posto poi:

$$(25)\qquad \begin{cases} A_1^1 = -A_2 + \dfrac{A_1}{N_1}\omega \qquad\qquad B_1^1 = B_2 - \dfrac{B_1}{N_1}\omega \\ \mu_1^1 = -\dfrac{\partial B_1^1}{\partial v} - \dfrac{\partial A_1^1}{\partial u} - B_1^1\dfrac{\partial \log H_1}{\partial v} - A_1^1\dfrac{\partial \log H_1}{\partial u}\,;\ \lambda_1^1 = \dfrac{\partial B_1^1}{\partial v} - \dfrac{\partial A_1^1}{\partial u} + \cdots \end{cases}$$

si prova facilmente che

$$(25^{-bis})\qquad \frac{\partial A_1^1}{\partial v} = -B_1^1\gamma_1 \ ;\ \frac{\partial B_1^1}{\partial u} = -A_1^1\beta_1 \ ;$$

$$\mu_1^1 = -\lambda_2 + \lambda_1\frac{\omega}{N_1} \ ;\ \lambda_1^1 = -\mu_2 + \mu_1\frac{\omega}{N_1}.$$

Si ha anche:

$$(25^{-ter}) \quad N_i^1 = 2A_i^1\left(\frac{\partial \mu_i^1}{\partial u} + 2A_1 p_1\right) - 2B_i^1\left(\frac{\partial \mu_i^1}{\partial v} + 2B_i^1 q_1\right) + \lambda_i^1 \mu_i^1$$

$$= N_2 + \frac{\omega^2}{N_1} - \frac{\omega}{N_1} N_{12},$$

Perciò in virtù di (25), ($25^{-bis}$) *il punto* $x_{12}$ *definito da* (24) [confronta le analoghe 8, 10, 11, 12] *descrive la seconda falda focale* $S_{12}$ *di una congruenza* W, *di cui* $S_1$ *è la prima falda. Altrettanto dicasi della relazione tra* $S_{12}$ *ed* $S_2$.

*Perciò le* $\infty^1$ *superficie* $S_{12}$ [dipendenti dalla costante arbitraria, da cui dipendono le $\omega, \Omega$ in virtù di (23)] *si ottengono da* S *componendo le due trasformazioni* W *da noi studiate. Esse si ottengono con la quadratura necessaria a determinare* $\omega$. *Per* $\omega = \infty$ *esse tendono alla superficie* S *di partenza.*

*Sia la* $S_1$, *che* $S_2$, *che ognuna delle superficie seconda falda delle congruenze* W *ottenute da* S *ponendo* $A = z_1 A_1 + z_2 A_2$, $B = z_1 A_1 + z_2 B_2$ ($z_i = \text{cost.}$) *formano con ciascuna delle* $S_{12}$ *le falde focali di una congruenza* W.

*Otteniamo così quello che potremmo chiamare un sistema di Bianchi di congruenze* W, (data la relazione tra tale sistema e i celebri *teoremi di permutabilità del Bianchi*).

**Meccanica.** — *Sulla possibilità della navigazione extra-atmosferica.* Nota del Corrispondente G. A. Crocco.

La navigazione nel vuoto o in aria molto rarefatta importa la possibilità di un propulsore che non abbia bisogno di appoggiarsi sul mezzo ambiente, quale il propulsore *a reazione.*

Questo tipo di propulsore consiste, come è noto, in un congegno capace di lanciare nello spazio continuamente una massa materiale ad alta velocità; onde si sviluppi in direzione opposta una spinta reattiva.

Se $m$ è la massa consumata nell'unità di tempo, $\alpha m$ la frazione di essa proiettata con velocità $v$; $\beta v$ la media proiezione geometrica di $v$ in senso opposto alla forza reattiva F; e se la massa proiettata è tutta preventivamente contenuta nel mobile; avremo per un noto teorema di meccanica:

$$F = \alpha\beta\, mv;$$

cosicchè, se $v$ è costante, anche F sarà costante e la massa residua del mobile potrà assumere velocità dello stesso ordine di $v$. Il motore a reazione, quindi, può condurre alla realizzazione di alte velocità di traslazione; e si presta in principio alla navigazione extra-atmosferica.

Cerchiamo a quali condizioni.

* * *

Per uscire dal campo della gravità occorre all'unità di massa un lavoro $gR$, ove con R indichiamo il raggio terrestre; oltre a quello necessario a comunicare alla massa stessa la velocità di traslazione V.

Se pertanto supponiamo di avere un mobile di massa $M_0$, spinto dall'azione di una forza F, costante lungo un percorso S, potremo scrivere in generale, trascurando la resistenza dell'aria:

$$FS = M_0 \left( gR + \frac{V^2}{2} \right).$$

Per applicare questa relazione al caso che ci interessa e determinare rapidamente l'ordine di grandezza delle quantità in gioco, noi faremo alcune approssimazioni semplificative.

Anzitutto, nell'ipotesi che la scorta di materia iniziale occorrente al propulsore a reazione sia una piccola frazione della massa totale, e che durante il percorso S se ne consumi solo una parte, trascureremo l'alleggerimento del mobile. In secondo luogo, supporremo che la velocità $v$ di uscita della materia reattiva sia molto grande rispetto a quella di traslazione V.

Infine, poichè il percorso S è supposto molto grande di fronte al raggio terrestre e quindi il moto si può ritenere uniformamente accelerato nella sua quasi totalità, sostituiremo ad S il suo valore approssimato $\frac{VT}{2}$ ove T è la durata del cammino.

Avremo allora la relazione:

$$\alpha\beta mv \frac{VT}{2} = M_0 \left( gR + \frac{V^2}{2} \right).$$

Ponendo in questa relazione $\mu = \frac{mT}{M_0}$, dove $mT$ rappresenta la materia consumata durante il tempo T, cioè durante il percorso S, ricaveremo la finale condizione approssimata:

$$(1) \qquad V^2 = \alpha\beta\mu v \, . \, V + 2gR = 0;$$

che è risolubile in V ed assegna a $v$ un *valor minimo*, ricavabile dalla relazione discriminante, al quale corrisponde un determinato valore di V.

* * *

Numericamente potremo porre in un apparecchio ideale $\alpha = \beta = 1$; ma circa il valore di $\mu$ dovremo pensare ad assicurare l'arrivo alla meta ed il ritorno; nonchè il mantenimento della traiettoria e le sue eventuali deviazioni. Cosicchè $\mu$ dovrà assumersi pari almeno alla quarta parte della

provvista iniziale, tenendo presente che il mobile si alleggerirà nel cammino. Fissando infine questa scorta iniziale eguale, essa stessa, ad un quarto della massa totale dell'apparecchio, cioè $\mu = 1:16$, avremo in cifre tonde:

$$v = 360.000 \text{ m/sec.}$$

$$V = 11.000 \text{ m/sec.};$$

che si possono considerare come valori minimi, almeno nel loro ordine di grandezza.

È facile riconoscere che nessuna delle energie già in possesso dell'uomo è capace di fornire l'elevato valore di $v$. Esso richiede infatti che dall'unità di massa della materia che, direttamente o indirettamente, provocherà tale risultato, possa *almeno* ricavarsi l'energia $\frac{1}{2} v^2$. Un chilogrammo in peso di questa materia dovrebbe perciò essere capace di fornire un minimo di 15.000.000 grandi calorie, mentre dalle reazioni chimiche più efficaci non si ricava neanco la millesima parte.

Questa cifra si attenua se si pensa soltanto alla navigazione in atmosfera molto rarefatta, con un ordinario aeroplano. In tal caso, supponendo di accrescere la velocità in ragione inversa del quadrato della densità atmosferica, e facendo qualche ipotesi semplificativa sul percorso, si ottengono velocità di traslazione dell'ordine di 5000 metri al secondo, con velocità della materia reattiva dell'ordine di 75000 metri al secondo.

Neanche questi valori sono raggiungibili coi combustibili attuali, il cui potere calorifico è 50 volte minore.

* * *

La soluzione dell'affascinante problema può invece venir fornito dalla disponibilità di una energia dell'ordine di grandezza di quella sviluppata nei fenomeni della *radioattività*, ove si osservano proiezioni di particelle materiali a velocità molto maggiori di quella indicata come minima; e con spontanea produzione di corrispondente energia (1).

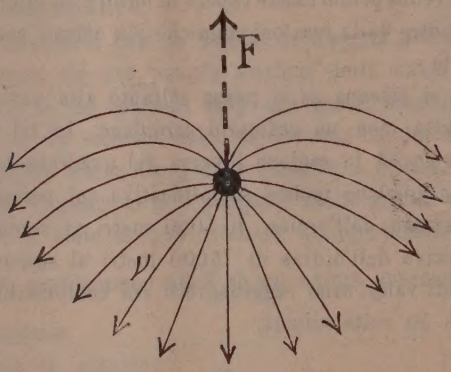
Se ed in qual modo possa venire conquistata e disciplinata questa ancor misteriosa forza della natura non è certo possibile oggi prevedere: ma, ammesso che ciò abbia luogo, possiamo intuire la possibilità di utilizzarla nel senso indicato, sia direttamente, sia indirettamente.

L'utilizzazione *diretta* presuppone che si abbia una emissione continua di particelle $\alpha$, come nelle sostanze radioattive, a velocità dell'ordine di grandezza da 10 a 20 milioni di metri al secondo, ma senza notevole sviluppo

(1) Facendo depositare una pellicola di radio A sopra un cartoncino e disponendolo in modo che arresti le radiazioni verso l'alto, il cartoncino si alleggerirà, per reazione, di parecchie volte il peso della sostanza radioattiva depositata.

di calore nella massa della sostanza: che si possa ottenere, in altri termini, sotto l'azione delle intense forze elettriche esistenti nei nuclei atomici, produzione di sola energia *cinetica*.

In tal caso, se sarà possibile provocarla in *una sola direzione* come avviene di un getto fluido o nei tubi di Crookes, il problema avrà la soluzione più brillante: se invece si avrà da fare con proiezioni *in ogni senso*, occorrerà allora *deviare quelle di un emispazio*, in modo da ottenere una risultante notevole da quella parte. Se il fenomeno sarà della stessa natura elettrica di quello radioattivo, ciò potrà ottenersi con deviazioni elettromagnetiche che alterino il meno possibile la velocità $v$ sulla traiettoria delle particelle; e riducano a una *minima frazione* la parte di energia che inevitabilmente sarà trasformata in calore.




Una parte di questo calore potrà allora venire utilizzato nella produzione dei campi magneto-elettrici necessarî; una parte verrà trasportato dalla materia sfuggente; ed infine la residua parte potrà venire irradiato nello spazio, con radiatori incandescenti, secondo la legge di Stefan.

L'utilizzazione *indiretta* presuppone invece che l'energia sviluppata sia in tutto od in parte calorifica: ed in questo caso essa non potrà utilizzarsi, in tutto od in parte, se non come energia motrice per generare, attraverso trasformazioni elettromagnetiche ed elettriche, la energia cinetica necessaria al propulsore su masse di materia inerte. Anche in questo caso una parte residua di calore dovrà venire dispersa secondo la legge di Stefan.

La pratica di queste affermazioni di principio non è certamente precisabile nè tanto meno agevole; ma è da prevedere che, supposto risoluto il problema essenziale di disporre della nuova sorgente di energia, tale pratica sia di natura secondaria.

* * *

Premesse le superiori considerazioni, vediamo quali ne sarebbero i risultati.

Assumeremo, come in alcuni fenomeni radioattivi, $v = 20$ milioni di metri al secondo: e porremo $\beta = 1/10$ (media tra quanto si osserva nell'uranio e nel torio). Così anche supporremo $\alpha = \frac{1}{2}$ come ipotesi media.

Dalla relazione (1) innanzi stabilita si ricava, allora in cifra tonda, $V = 60.000$ metri al secondo; il che corrisponde ad una velocità media di 30 chilometri al secondo.

Potremo pertanto enunciare la proposizione seguente:

*Disponendo di propulsori a reazione ove la materia sia lanciata con la velocità osservata nei fenomeni radioattivi, è possibile la traslazione umana nello spazio interplanetario con una velocità media dell'ordine di grandezza di quella della Terra sulla sua orbita.*

*La traslazione suddetta può essere teoricamente compiuta per qualsiasi distanza, ed è soltanto limitata dalla entità delle provviste necessarie al nutrimento ed alla respirazione.*

È da osservare che noi abbiamo supposto un movimento a forza propulsiva costante, e cioè quasi uniformemente accelerato lungo tutta una metà del viaggio; ma che è possibile, invece, mantenere una maggiore accelerazione per un tratto più breve, proseguendo poi *con moto uniforme*. Il limite della velocità media risulta allora *doppio* del valore precedente: e soltanto le restrizioni imposte dagli effetti di una eccessiva accelerazione sul corpo umano impediscono di raggiungerla sensibilmente. Ma la velocità media ottenibile deve nel fatto ritenersi tra una e due volte quella indicata.

* * *

La direzione di questa velocità può venir in ogni istante modificata orientando opportunamente la media direzione del getto reattivo, supposto ruotante attorno ad un punto fuori del centro di massa del mobile. Si provoca così una rotazione del mobile stesso attorno al suo centro di massa, il che trae seco una diversa orientazione nello spazio del vettore reattivo. Questa nuova orientazione, come del resto la primitiva, potrà essere mantenuta costante, finchè occorra, anche senza alcuna stabilizzazione giroscopica, agendo sulla direzione del getto come su di un sensibilissimo timone e traguardando la meta o un punto fisso. Dalla nuova orientazione nascerà la forza centripeta occorrente al mutamento di direzione del mobile.

Ciò richiede un consumo supplementare di materia attiva che è facile calcolare.

Se V è infatti la velocità del mobile, supposta per semplicità uniforme,

$\omega$ l'angolo di deviazione della traiettoria, $\varrho$ il raggio di curvatura, dovrà provocarsi una forza centripeta reattiva tale che sia:

$$\alpha\beta m v = \frac{M_0 V^2}{\varrho}.$$

Introducendovi la relazione

$$Vt = \omega\varrho$$

dove $t$ è la durata della deviazione; e indicando con $mt$ il consumo supplementare e con $\frac{mt}{M_0}$ quello relativo all'unità di massa del mobile, avremo semplicemente

$$\mu' = \omega\mu_0,$$

dove $\mu_0$ è dedotto dalla (1) per $R = 0$ e rappresenta il consumo necessario ad ottenere o arrestare la velocità V.

Se $\omega = \pi$, si ha l'*inversione* della direzione, cioè il ritorno senza fermata; ma con un consumo $\pi\mu_0$ invece di $2\mu_0$; quale si avrebbe arrestando V in traiettoria rettilinea e provocandola in senso opposto.

Il raggio di questa evoluzione può essere teoricamente qualsiasi, con *parità di consumo*: ma è limitato dagli effetti della accelerazione sul corpo umano.

* * *

Il congegno descritto è quindi *dirigibile* nello spazio: e la sua condotta non presenta difficoltà, sopratutto in periodo accelerativo.

In tal caso infatti esso realizza *la scatola di Einstein*, senza la fune, la carrucola, e l'*ubi consistam* ideati dall'illustre matematico: e il viaggiatore si trova a suo agio in un campo fittizio di gravità, che può avere l'ordine di grandezza di quello terrestre.

Ciò non ha luogo nel moto uniforme: ma ha bensì luogo tutte le volte che occorra deviare la traiettoria, cioè tutte le volte che occorra dirigersi.

Si deduce pertanto teoricamente possibile, col mobile descritto, la navigazione extra atmosferica ed interplanetaria: agevolata da una velocità di traslazione dell'ordine di grandezza di quella dei pianeti.

Tale velocità consente il viaggio Terra-Luna in meno di quattro ore: e quello Terra-Venere in poco più di otto giorni.

È da augurarsi che la rosea prospettiva di abbandonare per qualche tempo il pianeta natìo possa spingere l'uomo a ricercare con maggior lena l'interpretazione e la conquista dell'energia radioattiva.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Geometria.** — *Nouvelles formules de la géométrie affine.* Nota di EDUARD ČECH presentata dal Corrispondente G. FUBINI.

**1.** Dans l'espace affine, où le groupe fondamental est celui des affinités unimodulaires, on a à considérer deux classes contragrédientes de vecteurs, ceux de la premiere classe $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ayant comme composantes des différences de coordonnées de deux points.

Le produit vectoriel $\alpha \times \beta$ $(A \times B)$ de deux vecteurs de la première (seconde classe) est un vecteur de la seconde (première) classe, le produit scalaire $\alpha . A$ de deux vecteurs de classes différentes et le déterminant $(\alpha\, \beta\, \gamma)$ ou $(A\, B\, C)$ de trois vecteurs de la même classe sont des quantités scalaires.

**2.** Si le point $x$ décrit une *courbe gauche* orientée C, je fixe le facteur du vecteur (de la seconde classe) de direction du plan osculateur moyennant la condition

$$dx = \varepsilon \xi \times d\xi\,, \quad \varepsilon = \pm 1\,.$$

Le plus simple paramètre intrinsèque ou l'arc affine $\lambda$ est défini à une constante additive près, par une quelconque des expressions

$$d\lambda^3 = dx\,.\,d^2\xi = -\,d^2x\,.\,d\xi = \varepsilon(\xi\,, d\xi\,, d^2\xi)\,, \; d\lambda^6 = \varepsilon\,(dx\,, d^2x\,, d^3x)\,.$$

L'accent signifiant dérivation par rapport à $\lambda$, je pose

$$A = \xi''\,; B = -\,\xi'\,, C = \varepsilon\xi\,, (A\,BC) = 1\,,$$
$$\alpha = B \times C\,, \beta = C \times A\,, \gamma = A \times B\,.$$

On a deux invariants $k$ et $l$ dont les expressions indépendantes de la variable indépendante sont

$$l\,d\lambda^6 = d^3x\,.\,d^3\xi\,, \; k\,d\lambda^8 = d\lambda^3\left[d^3x\,.\,d^2\xi - \frac{1}{3}d^2(d\lambda^3)\right] + \frac{5}{9}\left[d(d\lambda^3)\right]^2\,;$$

remarquons que l'on a aussi

$$d^3x\,.\,d^2\xi = -\,d^2x\,.\,d^3\xi = -\,\varepsilon(\xi\,, d^2\xi\,, d^3\xi)\,.$$

Formules analogues à celles de Frenet:

$$\alpha' = \beta\,, \beta' = k\alpha + \varepsilon\gamma\,, \gamma' = -\,\varepsilon l\,\alpha\,,$$
$$A' = -\,kB + \varepsilon l\,C\,, B' = -\,A\,, C' = -\,\varepsilon B\,.$$

3. Considérons la *bande d'éléments de contact du seconde ordre* d'une surface non développable S le long d'une courbe non asymptotique C. Soit $x$ le point de C, $\xi$ le vecteur de direction du plan tangent de S. On choisit le facteur de $\xi$ de telle manière que

$$dx \pm \sqrt{\varepsilon}\, \xi \times d\xi \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

soient les directions des tangentes asymptotiques de S et que $\xi \,.\, d^2x > 0$.

Le plus simple paramètre intrinsèque ou *l'arc affine* $\lambda$ de la bande sera défini par l'équation

$$d\lambda^2 = \xi \,.\, d^2x = -\, d\xi \,.\, dx \,.$$

La bande possède quatre invariants P, Q, R, T dont les expressions indépendantes de la variable indépendante sont

$$\mathrm{P}\, d\lambda^3 = \frac{1}{2}\,(dx \,.\, d^2\xi - d^2x \,.\, d\xi)\ ,\ \mathrm{Q}\, d\lambda^6 = (dx \times d^2x) \,.\, (d\xi \times d^2\xi)\,,$$

$$\mathrm{R}\, d\lambda^6 = (dx\,,\, d^2x\,,\, d^3x)\ ,\ \mathrm{T}\, d\lambda^3 = (\xi\,,\, d\xi\,,\, d^2\xi)\,.$$

J'introduis un trièdre mobile $(x\,\alpha\,\beta\,\gamma)$ en posant

$$\alpha = x'\,,\ \beta = x'' - \mathrm{P}x'\,,\ \gamma = \xi \times \xi'\,,\ (\alpha\,\beta\,\gamma) = 1\,,$$
$$\mathrm{A} = \beta \times \gamma\,,\ \mathrm{B} = \gamma \times \alpha\,,\ \mathrm{C} = \alpha \times \beta\,,$$

les accents signifiant dérivation par rapport à $\lambda$.

Formules analogues à celles de Frenet:

$$\alpha' = \mathrm{P}\alpha + \beta\,,\ \beta' = -\,\mathrm{Q}\alpha + \mathrm{R}\gamma\,,\ \gamma' = \mathrm{T}\alpha - \mathrm{P}\gamma\,,$$
$$\mathrm{A}' = -\,\mathrm{P}\mathrm{A} + \mathrm{Q}\mathrm{B} - \mathrm{T}\mathrm{C}\,,\ \mathrm{B}' = -\,\mathrm{A}\,,\ \mathrm{C}' = -\,\mathrm{R}\mathrm{B} + \mathrm{P}\mathrm{C}\,.$$

4. Pour déterminer intrinsèquement la *bande d'éléments de contact du troisième ordre* de S de long de C, il faut connaître encore un autre invariant N à l'aide duquel le vecteur X de la normale affine s'exprime en fonction linéaire de $\beta$ et $\gamma$ selon la formule

$$\mathrm{X} = \beta + \mathrm{N}\gamma\,.$$

5. Si le point $x$ décrit une surface S non développable, $u$ et $v$ étant les variables indépendantes (1), on peut fixer le facteur du vecteur (de la seconde classe) $\xi$ de direction du plan tangent moyennant l'équation

$$\xi(\xi\,\xi_1\,\xi_2) = -\,\varepsilon\, x_1 \times x_2 \quad,\quad \varepsilon^2 = 1\,,$$

(1) Quelquefois, je pose $u = u_1\,,\ v = u_2\,.$

l'indice $i$ indiquant la dérivée par rapport a $u_i$. Le vecteur X de la normale affine est défini par les équations

$$X.\xi = 1 \ , \ X.\xi_1 = 0 \ , \ X.\xi_2 = 0 \ ;$$

on suppose le signe de X choisi de façon à avoir $(x_1\, x_2\, X) > 0$. Les deux formes différentielles de MM. Pick et Blaschke sont

$$F_2 = -dx\,.\,d\xi = \Delta_{11}\,du^2 + 2\Delta_{12}\,du\,dv + \Delta_{22}\,dv^2 \,.$$

$$F_3 = \frac{1}{2}(dx\,.\,d^2\xi - d^2x\,.\,d\xi) = \Delta_{111}\,du^3 + 3\Delta_{112}\,du^2\,dv + 3\Delta_{122}\,du\,dv^2 + \Delta_{222}\,dv^3 .$$

On pose

$$\nabla = \Delta_{11}\,\Delta_{22} - \Delta_{12}^2 \,.$$

Alors

$$\varepsilon = -\operatorname{sgn}\nabla \ , \ (x_1\, x_2\, X) = \sqrt{|\nabla|} \ , \ (\xi\, \xi_1\, \xi_2) = -\varepsilon\sqrt{|\nabla|} \,.$$

Encore, je pose

$$\vartheta_{11} = \frac{\Delta_{22}}{\nabla} \ , \ \vartheta_{12} = -\frac{\Delta_{12}}{\nabla} \ , \ \vartheta_{22} = \frac{\Delta_{11}}{\nabla} \,.$$

$$J = \frac{1}{\nabla^3}\begin{vmatrix} \Delta_{111} & \Delta_{112} & \Delta_{122} \\ \Delta_{112} & \Delta_{122} & \Delta_{222} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{vmatrix} ,$$

$$H = J + \text{courbure de } F_2 \,.$$

J'emploie le calcul absolu. $F_2$ étant la forme fondamentale, je dénote par $\varphi_i$ , $\varphi_{ik}$ ... les dérivées covariantes successives d'un invariant $\varphi$ , $c_{i_1 \ldots i_\alpha|j}$ , $c_{i_1 \ldots i_\alpha|jk}$ les systèmes déduites par dérivation covariante du système covariant $c_{i_1 \ldots i_\alpha}$ , et si

$$C = \sum_{i_1 \ldots i_\alpha} c_{i_1 \ldots i_\alpha}\, du_{i_1} \,.\, .\, du_{i_\alpha} \,,$$

je pose

$$\delta C = \sum_{i_1 \ldots i_\alpha j} c_{i_1 \ldots i_\alpha|j}\, du_{i_1} \ldots du_k\, du_j \ , \ \delta^2 C = \sum_{i_1 \ldots i_\alpha jk} c_{i_1 \ldots i_\alpha|jk}\, du_{i_1} \,..\, du_{i_\alpha}\, du_j\, du_k \,.$$

J'emploie aussi les différentielles contravariantes de M. Levi-Civita et Fubini

$$\delta^2 u_i = d^2 u_i + \sum_{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} du_r\, du_s \ , \ \delta^3 u_i = d\left(\delta^2 u_i\right) + \sum_{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} du_r\, \delta^2 u_s \,.$$

Je pose

$$D_{11} = \frac{1}{\sqrt{|\nabla|}}(\Delta_{111/2} - \Delta_{112/1}),$$

$$D_{12} = \frac{1}{\sqrt{|\nabla|}}(\Delta_{112/2} - \Delta_{122/1}),\ D_{22} = \frac{1}{\sqrt{|\nabla|}}(\Delta_{122/2} - \Delta_{222/1}),$$

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{|\nabla|}}(D_{11/2} - D_{12/1}),$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{|\nabla|}}(D_{12/2} - D_{22/1}),\ D = \frac{1}{\sqrt{|\nabla|}}(D_{1\,2} - D_{2/1}),$$

$$\vartheta = d_{11}\,du^2 + 2d_{12}\,du\,dv + d_{22}\,dv^2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\nabla|}}\begin{vmatrix} D_{11}\,du + D_{12}\,dv, & D_{12}\,du + D_{22}\,dv \\ \Delta_{11}\,du + \Delta_{12}\,dv, & \Delta_{12}\,du + \Delta_{22}\,dv \end{vmatrix},$$

$$F_2^{(i)} = \Delta_{1i}\,du + \Delta_{2i}\,dv\ ,\ F_3^{(i)} = \Delta_{111}\,du^2 + 2\Delta_{12i}\,du\,dv + \Delta_{22i}\,dv^2\ .\ (i = 1, 2).$$

Les équations fondamentales et leurs conditions d'intégrabilité (Radon) sont

$$\sum_{ik} x_{ik}\,du_i\,du_k = \sum_{rs} \vartheta_{rs}\,F_3^{(r)}\,x_s + F_2\,X,$$

$$dX = -H\,dx + \sum_{irs} \vartheta_{rs}\,d_{ir}\,du_i\,x_s,$$

$$\sum_{ik} \xi_{ik}\,du_i\,du_k = -\sum_{rs} \vartheta_{rs}\,F_3^{(r)}\,\xi_s + (\vartheta - HF_2)\,\xi,$$

$$H_i - \varepsilon D_i = \begin{vmatrix} \Delta_{i11} & \Delta_{i12} & \Delta_{i22} \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \\ D_{11} & D_{12} & D_{22} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2).$$

6. J'ai calculé l'arc affine $\lambda$ et les invariants $k$ et $l$ d'une courbe asymptotique, ainsi que le trièdre mobile attaché à la courbe (voir n° 2).

Si $e = \operatorname{sgn} F_3$, on a

$$d\lambda^3 = |F_3|,\ k = \frac{F_3^2\,\vartheta + \frac{5}{9}(\delta F_3)^2 - \frac{1}{3}F_3\,\delta^2 F_3}{F_3^{8/3}},\ l = e\left(\frac{\delta\vartheta}{F_3} + H\right).$$

$$eA = \frac{3\vartheta}{F_3^{5/3}}\xi - \frac{\delta F_3}{F_3^{5/3}}d\xi - \frac{3\sum_{rs}\vartheta_{rs}\,F_3^{(r)}\,\xi_s}{F_3^{2/3}},$$

$$eB = -\frac{d\xi}{F_3^{1/3}},\ eC = \varepsilon'\xi.$$

L'$\varepsilon'$ est l'$\varepsilon$ du n° 2, et peut être déterminé d'une quelconques des deux équations

$$F_2^{(1)} = -\varepsilon' \sqrt{|\nabla|}\, dv \quad , \quad F_2^{(2)} = \varepsilon' \sqrt{|\nabla|}\, du .$$

7. J'ai calculé aussi l'arc affine $\lambda$ et les cinq invariants P, Q, R, T, N de la bande d'élément de contact du troisième ordre le long d'une courbe non asymptotique. L'$\varepsilon$ du n° 3 est égal à l'$\varepsilon$ du n° 5. Si $e = \operatorname{sgn} F_2$, on a

$$d\lambda^2 = |F_2| , \quad P = e \frac{F_3}{|F_2|^{3/2}} , \quad T = e\,(T_s + T_g) , \quad N = e\,\varepsilon\,(T_s - T_g) ,$$

$$T_g = -\varepsilon \frac{1}{|F_2|^{3/2}} \sqrt{|\nabla|} \left( du\, \delta^2 v - dv\, \delta^2 u \right), \quad T_s = \frac{1}{\sqrt{|\nabla F_2^3|}} \begin{vmatrix} F_3^{(1)} & F_3^{(2)} \\ F_2^{(1)} & F_2^{(2)} \end{vmatrix} ,$$

$$\frac{1}{2} J = e \left( \varepsilon\, T_s^2 - P^2 \right) ,$$

$$Q = NT + e \left( H - \frac{\vartheta}{F_2} \right) ,$$

$$R = NP - \frac{dN}{d\lambda} + \frac{D_{11}\, du^2 + 2\, D_{12}\, du\, dv + D_{22}\, dv^2}{|F_2|} .$$

Les vecteurs $\alpha , \beta , \gamma$ du trièdre mobile attaché à la bande sont donnés par les équations

$$\alpha = \frac{dx}{|F_2|^{1/2}} , \quad e\beta = \varepsilon\,(T_g - T_s)\,\gamma + X ,$$

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{|\nabla F_2|}} \begin{vmatrix} F_2^{(1)} & x_1 \\ F_2^{(2)} & x_2 \end{vmatrix} .$$

8. Le lecteur trouvera les démonstrations et tous les détails dans mon Mémoire « Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine » qui paraîtra dans les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, Tchécoslovaquie.

**Matematica.** — *Potenziale di un disco con distribuzione simmetrica.* Nota di Rocco Serini, presentata dal Socio Tullio Levi Civita.

La presente Nota contiene il risultato fondamentale ottenuto dal Beltrami nella Memoria *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche* (1). I metodi ch'io seguo sono però più semplici e credo presentino qualche interesse, specialmente per le applicazioni ch'io ne sto tentando ad altri problemi, p. e. a quelli della distribuzione elettrica sopra una corona circolare e sopra un disco con anello di guardia, dei quali problemi scriverò in fine le equazioni.

1. Preliminari. — Se $I_0(x)$ è la funzione cilindrica di 1ª specie d'ordine zero, è ben noto che la funzione

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty e^{\pm zs} I_0(rs) \psi(s)\, ds \tag{1}$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la funzione potenziale di una distribuzione simmetrica sul piano $z = 0$ la cui densità è proporzionale a

$$\int_0^\infty I_0(rs)\, s\, \psi(s)\, ds. \tag{2}$$

Quindi, se è imposta alla $\varphi$ la condizione di prendere valori assegnati nell'interno del disco ($r < a$, $z = 0$) e alla densità di annullarsi all'infuori di esso, la $\psi(s)$ dovrà soddisfare alle due equazioni

$$\int_0^\infty I_0(rs)\, \psi(s)\, ds = V(r) \quad \text{per } r < a, \tag{3}$$

$$\int_0^\infty I_0(rs)\, s\, \psi(s)\, ds = 0 \qquad \text{per } r > a. \tag{4}$$

Sono queste le equazioni che ha risolto il Beltrami fondandosi sopra i risultati di una sua precedente Memoria (2).

2. Primo metodo. — Io farò vedere come si possa risolvere il problema fondandomi sopra note proprietà integrali delle funzioni cilindriche

(1) Memorie Acc. Bologna, Serie IV, tomo II, 1880, pp. 461–505, oppure *Opere*, tomo 3°, pp. 349-382.

(2) *Opere*, tomo 3°, pp. 269-304.

$I_0(x)$ , $I_1(x) = -I_0'(x)$, riducendo il sistema ad una equazione integrale di Abel. Le accennate proprietà integrali sono espresse dalle formole (3)

$$(5) \qquad \int_0^\infty I_1(rs)\cos st\,ds = \frac{1}{r} \qquad \text{per } t < r\,,$$

$$(6) \qquad \int_0^\infty I_0(rs)\cos st\,ds = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{r^2-t^2}} & \text{per } t < r\,, \\ 0 & \text{per } t > r\,, \end{cases}$$

Intanto, tenuto conto della equazione differenziale a cui soddisfa $I_0(x)$ che si può scrivere

$$\frac{d}{ds}\left[s\,I_0'(rs)\right] + rs\,I_0(rs) = 0$$

la (4) prende la forma

$$(4') \qquad \frac{d}{dr}\left(r\int_0^\infty I_1(rs)\,\varphi(s)\,ds\right) = 0 \qquad \text{per } r > a\,.$$

Ma allora per la (5) la funzione

$$\varphi(s) = \cos st \quad \text{per } t < a$$

od anche la

$$\psi(s) = \int_0^a f(t)\cos st\,dt$$

con $f(t)$ funzione arbitraria soddisfa la (4') equivalente alla (4). Rimarrà quindi da determinare $f(t)$ in modo tale che

$$(3') \qquad \int_0^\infty I_0(rs)\,ds \int_0^a f(t)\cos st\,dt = V(r) \qquad r < a\,.$$

Se in questa invertiamo le derivazioni e teniamo conto della (6), otteniamo la nuova equazione

$$\int_0^r \frac{f(t)}{\sqrt{r^2-t^2}}\,dt = V(r)\,;$$

è questa una equazione di Abel, che colla sostituzione $t = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ si riduce

(osservando poi che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$) alla forma

$$(3'') \qquad \int_0^\pi f(r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta = 2V(r)\,.$$

(3) Memorie (1), Appendice.

Sotto la forma (3″) è stata considerata dal Beltrami (4) che ne dà la soluzione

$$f(r) = \frac{2}{\pi}\left[ V(o) + r\int_0^{\frac{\pi}{2}} V'(r \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \right] =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[ V(o) + r\int_0^r \frac{V'(\tau)}{\sqrt{r^2-\tau^2}}\, d\tau \right].$$

In conclusione

$$(7) \qquad \psi(s) = \frac{2}{\pi}\left[ V(o)\int_0^a \cos st\, dt + \int_0^a t\cos st\, dt \int_0^t \frac{V'(\tau)}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, d\tau \right] =$$
$$= \frac{2}{\pi} V(o)\frac{\operatorname{sen} as}{s} + \frac{2}{\pi}\int_0^a t\cos st\, dt \int_0^t \frac{V'(\tau)}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\, d\tau .$$

**3.** Secondo metodo. — Ma il metodo più naturale per risolvere le (3)-(4) sarebbe quello di partire dal teorema di Hankel (5) pel quale la soluzione più generale della (4) è data da

$$\psi(s) = \int_0^a I_0(st)\, t\, \chi(t)\, dt,$$

con $\chi(t)$ funzione arbitraria da determinarsi colla (3) in modo quindi che sia

$$(8) \qquad \int_0^\infty I_0(rs)\, ds \int_0^a I_0(st)\, t\, \chi(t)\, dt = V(r) \ , \ r < a.$$

Poniamo

$$(9) \qquad \chi(t) = \int_t^a \frac{f_1(u)\, du}{\sqrt{u^2-t^2}} :$$

la (8) diventerà

$$(8') \qquad \int_0^\infty I_0(rs)\, ds \int_0^a I_0(st)\, t\, dt \int_t^a \frac{f_1(u)\, du}{\sqrt{u^2-t^2}} = V(r) \ , \ r < a,$$

e di qui, invertendo le due ultime integrazioni ed applicando il teorema di Dirichlet,

$$\int_0^\infty I_0(rs)\, ds \int_0^a f_1(u)\, du \int_0^u \frac{I_0(st)\, t}{\sqrt{u^2-t^2}}\, dt = V(r) \ , \ r < a .$$

L'ultimo integrale, colla sostituzione $t = u \operatorname{sen}\theta$, diventa

$$u\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0(su \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{\operatorname{sen} su}{s} , \ (6)$$

(4) Beltrami, *Intorno ad un teorema di Abel ed alcune sue applicazioni*. Rend. Ist. Lombardo, Serie II, vol. XIII (1880), pp. 327-337, oppure *Opere*, tomo 3°, pp 248-257.

(5) Mathematische Annalen, Bd. 8, p. 482 (1875).

(6) Vedi nota (4).

avremo quindi come trasformata della (8′)

$$(8'') \qquad \int_0^\infty I_0(rs)\frac{ds}{s}\int_0^a f_1(u)\,\mathrm{sen}\,su\,du = V(r)\ ,\ r<a\,.$$

Ora, osservando che

$$\frac{\mathrm{sen}\,su}{s} = \int_0^u \cos st_1\,dt_1\,,$$

si può anche scrivere

$$\int_0^\infty I_0(rs)\,ds\int_0^a f_1(u)\,du\int_0^u \cos st_1\,dt_1 = V(r)\ ,\ r<a:$$

ed applicando nuovamente il teorema di Dirichlet

$$(8''') \qquad \int_0^\infty I_0(rs)\,ds\int_0^a \cos st_1\,dt_1\int_{t_1}^a f_1(u)\,du = V(r)\ ,\ r<a\,.$$

Ma questa non è che l'equazione (3′) avendosi tra $f$ e $f_1$ la relazione

$$(10) \qquad f(t) = \int_t^a f_1(u)\,du\,.$$

Basta ora trattare la (8‴) come la (3′) per ottenere il risultato finale.

**4.** Equazioni per l'equilibrio elettrico sopra una corona circolare e sopra un disco con anello di guardia. — Siano $a$, $a+h$ i raggi della corona circolare, 1 il suo potenziale. Dovrà allora essere soddisfatta la (4) per $r>a+h$, $r<a$ e per questo basta pel teorema di Hankel prendere

$$\psi(s) = \int_a^{a+h} I_0(st)\,t\,\chi(t)\,dt\,.$$

Rimarrà quindi da determinare $\chi(t)$ in modo tale che per la (3)

$$(11) \qquad \int_0^\infty I_0(rs)\,ds\int_a^{a+h} I_0(st)\,t\,\chi(t)\,dt = 1 \quad \text{per } a<r<a+h\,.$$

Sia ora un disco a potenziale 1 (raggio $a$) e una corona circolare (anello di guardia) di raggi $a+h$, $a+h+k$ (a potenziale zero). Se prendiamo

$$\psi(s) = \int_0^a I_0(st)\,t\,\chi_1(t)\,dt + \int_{a+h}^{a+h+k} I_0(st)\,t\,\chi_2(t)\,dt$$

è soddisfatta la (4) per $a<r<a+h$, $r>a+h+k$.

Si dovranno quindi determinare le due funzioni incognite $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ in modo tale che

$$(12) \quad \int_0^\infty I_0(rs)\,ds\int_0^a I_0(st)\,t\,\chi_1(t)\,dt + \int_0^\infty I_0(rs)\,ds\int_{a+h}^{a+h+k} I_0(st)\,t\,\chi_2(t)\,dt = \begin{cases} 1 & \text{per } r<a \\ 0 & \text{per } a+h<r<a+h+k\,. \end{cases}$$

**Matematica.** — *Sopra la teoria delle quadrature dette meccaniche.* Nota di W. Stekloff, Vicepresidente dell'Accademia di Russia, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Sia $p(x)$ una funzione assegnata integrabile in un dato intervallo da $a$ a $b$ $(b > a)$, la quale non assume in questo intervallo valori negativi; $f(x)$ qualsiasi altra funzione integrabile nell'intervallo $(a\,.\,b)$.

Prendiamo una successione di numeri

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots\,,\ a_n\,,$$

compresi fra $a$ e $b$, e un'altra successione di numeri ad essi corrispondenti

$$\mathrm{A}_1\,,\ \mathrm{A}_2\,,\ \mathrm{A}_3\,,\ \ldots\,,\ \mathrm{A}_n\,,$$

e determiniamo $a_k$ ed $\mathrm{A}_k$ $(k = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots\,,\ n)$ in modo che per ogni polinomio $\mathrm{P}_m(x)$ di grado non superiore a $m$, dove $m$ è un numero non maggiore di $2n - 1$, abbia luogo l'eguaglianza

$$(1) \qquad \int_a^b p(x)\,\mathrm{P}_m(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k\,\mathrm{P}_m(a_k)\,.$$

Otteniamo $m + 1$ delle equazioni

$$(2) \qquad \mathrm{A}_1\,a_1^k + \mathrm{A}_2\,a_2^k + \cdots + \mathrm{A}_n\,a_n^k = \int_a^b p(x)\,x^k\,dx \qquad (k = 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ m)$$

cui debbono soddisfare $2n$ dei valori $a_k$ ed $\mathrm{A}_k$.

Di essi $2n - (m + 1)$ rimarranno, in generale, arbitrari, mentre gli altri $m + 1$ verranno espressi pei precedenti mediante le equazioni (2).

I numeri $\mathrm{A}_k$ ed $a_k$ dipenderanno soltanto dai numeri $a\,,\ b$ e dalla funzione $p(x)$, ma non dalla funzione $f(x)$.

Definiti così gli $\mathrm{A}_k$ ed $a_k$, poniamo

$$(3) \qquad \int_a^b p(x)\,f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k\,f(a_k) + \mathrm{R}_n\,.$$

Otteniamo la formula per il calcolo approssimato dell'integrale del primo membro di questa equazione col resto $\mathrm{R}_n$, la quale porta il nome di *formula delle quadrature meccaniche.*

Esiste una quantità infinita di tali formule fra cui meritano attenzione speciale quelle coi coefficienti $\mathrm{A}_k$ positivi.

Tali sono la nota formula di Gauss, le formule indicate dal Markoff [cfr. il suo « Calcolo delle differenze finite » in russo, Odessa, 1910], la

formula di Tchebicheff, le formule di Tchebicheff generalizzate da Sonin e moltissime altre.

2. T. Stieltjes nella sua Memoria « *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques* » (Ann. de l'École Norm., Paris, 1884, III sér. t. I) ha dimostrato che *il resto $R_n$ della formula di Gauss tende a zero, per $n = \infty$, qualunque sia la funzione $f(x)$ integrabile (nel senso di Riemann) nell'intervallo $(a, b)$* ossia, come converremo di dire, *la formula di Gauss converge per ogni funzione integrabile*. L'analisi di Stieltjes è basata sulla nota proprietà della distribuzione delle radici dei polinomi di Legendre.

In questa Nota mi propongo di dimostrare, mediante un altro metodo molto semplice, il teorema generale che vale per qualsivogliano formule di quadrature con coefficienti positivi e comprende il teorema di T. Stieltjes come caso particolare.

La dimostrazione sarà basata sopra un teorema analogo che vale per qualsiasi funzione $f(x)$ *continua* nel dato intervallo $(a, b)$, e per ogni formula delle quadrature i cui coefficienti soddisfano alla condizione

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k| < A, \tag{4}$$

dove A è un numero determinato.

3. Sia $\varphi(x)$ una funzione arbitraria da $x$; $P_m(x)$ un polinomio arbitrario di grado $m \leq 2n-1$.

Poniamo

$$\varphi(x) = P_m(x) + \varrho_m(x). \tag{5}$$

Applicando la formula (3) alle funzioni $\varphi(x)$ e $P_m(x)$ ed indicando con $R'_n$ il resto di questa formula per $\varphi(x)$, otteniamo

$$R'_n = \int_a^b p(x)\,\varrho_m(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \varrho_m(x). \tag{6}$$

Applicando poi la formula (3) alle funzioni $\varphi(x)$ e $f(x)$, dove $f(x)$ è un'altra qualsiasi funzione di $x$, ed indicando con $R_n$ il resto per la funzione $f(x)$, otteniamo

$$R_n = R'_n + \sum A_k [\varphi(a_k) - f(a_k)] - \int_a^b p(x)\,[\varphi(x) - f(x)]\,dx. \tag{7}$$

Questa formula vale per due funzioni qualisivogliano $f(x)$ e $\varphi(x)$ e per qualunque polinomio $P_m(x)$ di grado non superiore a $2n-1$.

4. Poniamo per maggior semplicità

$$a = -1 \quad , \quad b = +1$$

ed indichiamo con

$$X_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

i polinomi di Legendre corrispondenti all'intervallo $(-1, +1)$.

Poniamo

$$\varrho_m(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{2} B_k X_k(x), \tag{8}$$

dove

$$B_k = \int_{-1}^{+1} \varphi(x) X_k(x)\, dx. \tag{9}$$

E' facile persuadersi che

$$\varrho_m(x) = \frac{m+1}{2}\left(X_{m+1}(x)\int_{-1}^{+1} F(x, y) X_m(y)\, dy - \right. \tag{10}$$

$$\left. - X_m(x)\int_{-1}^{+1} F(x, y) X_{m+1}(y)\, dy\right),$$

dove si è posto

$$F(x, y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}.$$

Supponiamo che la funzione $\varphi(x)$ ammetta le derivate dei due primi ordini entro $(a, b)$ e indichiamo con $M_2$ il massimo del modulo di $\varphi''(x)$ in questo intervallo.

Mediante una semplice integrazione per parti, tenendo presenti le note proprietà dei polinomi di Legendre, ricaviamo

$$\left|\varrho_m(x)\right| < \frac{M_2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2m+1}}. \tag{11}$$

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $(-1, +1)$, cioè

$$|f(x+\delta) - f(x)| < \varepsilon'$$

$\delta$ essendo sufficientemente piccolo.

Poniamo

$$\varphi(x) = \frac{1}{h^2}\int_{x}^{x+h} d\xi \int_{\xi}^{\xi+h} f(z)\, dz, \tag{12}$$

dove $h$ è un numero positivo.

In questo caso, $h$ essendo convenientemente scelto, avremo in virtù di (11)

$$M_2 = 2\frac{\varepsilon'}{h^2},$$

$$\left|\varrho_m(x)\right| = \left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{2} B_k X_k(x)\right| < \sqrt{2}\frac{\varepsilon'}{h^2}\frac{1}{\sqrt{2m+1}}. \tag{13}$$

5. Applichiamo la formula (7) alle funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, legate dalla relazione (12), e poniamo

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{2} B_k X_k(x).$$

Otteniamo, tenendo conto di (13) e (4),

$$(14) \quad |R_n| < (Q\sqrt{2} + A) \frac{\varepsilon'}{h^2 \sqrt{2m+1}} + (Q + A) \max |\varphi(x) - f(x)|,$$

dove

$$Q = \int_{-1}^{+1} p(x)\, dx .$$

Il numero $h$ può sempre essere scelto così piccolo che si abbia

$$(Q + A) \max |\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e poi i numeri $n$ ed $m < 2n - 1$ così grandi che si otterrà

$$(Q\sqrt{2} + A) \frac{\varepsilon'}{h^2 \sqrt{2m+1}} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Dalle (14) si deduce allora

$$(15) \qquad |R_n| < \varepsilon \qquad \text{per } n \text{ sufficientemente grande.}$$

Abbiamo preso, per semplicità di scrittura, l'intervallo $(-1, +1)$, ma è ben evidente che la disuguaglianza (15) vale per qualsiasi intervallo $(a, b)$.

Così otteniamo il teorema:

TEOREMA I. — *Ogni formula di quadratura meccanica, i cui coefficienti* $A_k$ *sono subordinati ad una condizione* (4), *converge per qualesivoglia funzione* $f(x)$ *continua nel dato intervallo* $(a, b)$.

6. Dividiamo l'intervallo $(a, b)$ in $n$ parti ed indichiamo con $\delta_1$ la somma delle lunghezze di tali intervalli, ognuno dei quali contiene almeno un punto corrispondente alle ascisse $a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; con $\delta_2$ la somma delle lunghezze degli intervalli, ciascuno dei quali non contiene alcuno dei punti sopradetti.

Applicando il teorema I alla funzione continua eguale a zero in tutti gli intervalli del primo gruppo e diversa da zero e positiva in ogni intervallo del secondo gruppo, si deduce senza difficoltà il seguente lemma:

LEMMA I. — *Per ogni formula di quadratura meccanica a coefficienti positivi la somma delle lunghezze* $\delta_2$ *degli intervalli, ognuno dei quali non contiene alcun punto corrispondente alle ascisse* $a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$,

*può essere resa minore del numero $\varepsilon$ arbitrariamente scelto per $n$ abbastanza grande, cioè*

$$\delta_2 < \varepsilon \qquad per \qquad n \geq n_0 ,$$

*dove $n_0$ è un numero intero convenientemente scelto.*

7. Sia $(\alpha , \beta)$ un qualsiasi intervallo compreso nel dato intervallo $(a , b)$. Siano

$$a' , a'' , \ldots , a^{(s)} \tag{16}$$

quantità di $a_k$ corrispondenti all'intervallo $(\alpha , \beta)$ e disposte nell'ordine crescente dei loro valori numerici. Applichiamo il teorema I ed il lemma I testè dimostrato alla funzione continua $f(x)$ subordinata alle condizioni

$$f(x) = 0 \qquad \text{per} \qquad \begin{matrix} a \leq x \leq \alpha , \\ \beta \leq x \leq b \end{matrix}$$

e

$$f(x) = 1 \qquad \text{per} \qquad a + h \leq x \leq \beta - h ,$$

dove $h$ è un valore arbitrariamente piccolo, minore della minima delle differenze $(a' - \alpha) , (\beta - a^{(s)})$.

Otteniamo il seguente lemma:

Lemma II. — *Per ogni formula di quadratura meccanica a coefficienti positivi si può, avendo arbitrariamente dato il numero positivo $\varepsilon$, trovare un numero intero $n_0$ così grande che si abbia*

$$\sum A_k = \int_\alpha^\beta p(x)\, dx + \varepsilon_n ,$$

*dove la somma si estende a tutti i coefficienti $A_k$ corrispondenti ai numeri (16), $\varepsilon_n$ essendo un valore subordinato alla diseguaglianza*

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon \qquad per \qquad n \geq n_0 .$$

8. Sia $f(x)$ una qualsivoglia funzione di $x$ integrabile nell'intervallo $(a , b)$.

Dividiamo questo intervallo in $q$ intervalli parziali $\delta_i$ $(i = 1 , 2 , \ldots , q)$.

Siano $\mu_i$ e $p_i$ valori qualisivogliano delle funzioni $f(x)$ e $p(x)$ presi ad arbitrio nell'intervallo $\delta_i$.

Poichè le funzioni $f(x)$ e $p(x)$ sono integrabili nell'intervallo $(a , b)$, si avrà, per $q$ sufficientemente grande,

$$\left| \int_a^b p(x)\, f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{q} \mu_i p_i \delta_i \right| < \frac{\varepsilon'}{2} , \tag{17}$$

dove $\varepsilon'$ è un numero positivo dato ad arbitrio.

Preso $q$ nel modo indicato, assumiamo un numero $\varepsilon$ tale che

$$(18) \qquad Mq\,\varepsilon < \frac{\varepsilon'}{2},$$

M essendo il massimo di $|f(x)|$ nell'intervallo $(a, b)$.

In virtù del lemma II si potrà trovare un numero $n_0 > q$ tale che si abbia per ogni intervallo $\delta_i$,

$$(19) \qquad \sum_i A_i = \int_{\delta_i} p(x)\,dx + \varepsilon_n^{(i)} = p_i\,\delta_i + \varepsilon_n^{(i)},$$

dove

$$(20) \qquad |\varepsilon_n^{(i)}| < \varepsilon \qquad \text{per} \qquad n \geq n_0.$$

9. Dividiamo l'intervallo $(a, b)$ in $n \geq n_0 > q$ intervalli parziali e sia $m_i$ il numero di questi intervalli compresi in $\delta_i$.

La somma del secondo membro della formula (3) può scriversi sotto la forma

$$\sum_{k=1}^{n} A_k f(a_k) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{i} A_k f(a_k).$$

Ora, in forza di (18),

$$\sum_i A_k f(a_k) = \mu_i \sum_i A_k = \mu_i p_i \delta_i + \mu_i \varepsilon_n^{(i)}.$$

Per conseguenza

$$\sum_{k=1}^{n} A_k f(a_k) = \sum_{i=1}^{q} \mu_i p_i \delta_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_i \varepsilon_n^{(i)}$$

e poichè in virtù di (19) e (20),

$$\left| \sum_{i=1}^{q} \mu_i \varepsilon_n^{(i)} \right| < Mq\,\varepsilon < \frac{\varepsilon'}{2},$$

si ottiene

$$\left| \sum_{k=1}^{n} A_k f(a_k) - \sum_{i=1}^{q} \mu_i p_i \delta_i \right| < \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Confrontando questa diseguaglianza con (17) deduciamo

$$\left| \int_a^b p(x) f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(a_k) \right| < \varepsilon'$$

$n$ essendo sufficientemente grande.

Ne risulta il teorema:

Teorema II. — *Per ogni formula di quadratura meccanica a coefficienti positivi la somma*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k f(a_k)$$

*tende a*

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx$$

*al crescere indefinito di $n$, in altre parole, ogni formula di quadratura meccanica a coefficienti positivi converge per qualesivoglia funzione $f(x)$ integrabile nel dato intervallo.*

**10.** Noterò a questo proposito che il n. 4 comprende una semplicissima dimostrazione del teorema di Weierstrass sull'approssimazione delle funzioni continue per mezzo di polinomi.

Infatti, dato ad arbitrio $\varepsilon'$ e scelto convenientemente $n$, otteniamo la diseguaglianza (13) che vale per ogni valore di $m$.

Essendo i numeri $\varepsilon'$ e $h$ fissati nel modo indicato, si avrà nello stesso tempo

$$|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon' . \tag{21}$$

Ciò posto, prendiamo l'intero arbitrario $m$ tale che si abbia

$$\frac{\sqrt{2}}{h^2\sqrt{2m+1}} < 1 .$$

La diseguaglianza (13) diviene

$$|\varphi(x) - P_m(x)| < \varepsilon' , \tag{22}$$

dove

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{2} B_k X_k(x)$$

è un polinomio di grado $m$.

Le diseguaglianze (21) e (22) conducono alla seguente

$$|f(x) - P_m(x)| < 2\varepsilon' ,$$

*che dimostra il teorema di Weierstrass.*

**Geometria.** — *Le geometrie di Sophus Lie e le geometrie non pitagoriche in generale.* Nota di ADRIANO MACCONE, presentata dal Corrispondente G. FUBINI.

Nelle geometrie fin qui considerate viene studiata una forma quadratica differenziale definita positiva

$$\sum_{i,k}^{1\ldots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

che si assume (per naturale generalizzazione del teorema di Pitagora) come quadrato dell'elemento lineare $ds$.

Sophus Lie, abbandonando il concetto di elemento lineare, ha studiato alcune geometrie che non rientrano nel tipo precedente, ammettendo che due punti abbiano un solo invariante: la loro distanza, e che più punti abbiano un solo invariante, le mutue distanze due a due.

Nel presente lavoro mi propongo di abbracciare sotto un sol punto di vista le une e le altre geometrie (1), senza ammettere la forma quadratica per l'elemento lineare, ma partendo però sempre dalla concezione di elemento lineare.

Assumo come elemento lineare una espressione del tipo:

$$(1) \qquad ds = dx_1\, \varphi\left(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1} \ldots \frac{dx_n}{dx_1}\right)$$

e cerco quando è che ammette un gruppo di movimenti.

Si devono considerare a parte gli elementi lineari che dico *degeneri*, del tipo:

$$ds = dx_1\, \varphi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{dx_2}{dx_1}, \ldots \frac{dx_{i-1}}{dx_1}, \frac{dx_{i+1}}{dx_1} \ldots \frac{dx_n}{dx_1}\right)$$

$$i = 2, 3 \ldots n$$

generalizzazione di quelli a discriminante nullo.

Per gli altri osservo che ogni trasformazione infinitesima

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

(1) Limitandomi alle geometrie piane.

ampliata con la introduzione delle variabili

$$z_1 = \frac{dx_2}{dx_1}, z_2 = \frac{dx_3}{dx_1}, \ldots z_{n-1} = \frac{dx_n}{dx_1}$$

diviene del tipo:

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \ldots \eta_{n-1} \frac{\partial}{\partial z_{n-1}}$$

dove è

$$\eta_1 = \frac{d\xi_2}{dx_1} - \frac{dx_2}{dx_1}\frac{d\xi_1}{dx_1}, \ldots \eta_{n-1} = \frac{d\xi_n}{dx_1} - \frac{dx_n}{dx_1}\frac{d\xi_1}{dx_1}.$$

Chiamando con $\varepsilon$ un parametro infinitesimo ed uguagliando a zero la variazione della forma differenziale (I) si trova, dopo aver diviso per $dx_1$:

$$\varphi(\xi_{1x_1} + z_1 \xi_{1x_2} + \ldots + z_{n-1}\xi_{1x_n}) + \varphi_{x_1}\xi_1 + \varphi_{x_2}\xi_2 + \ldots + \varphi_{x_n}\xi_n +$$
$$+ \varphi_{z_1}[(\xi_{2x_1} + z_1 \xi_{2x_2} + \ldots) - z_1(\xi_{1x_1} + \xi_{1x_2} z_1 + \xi_{1x_3} z_2 + \ldots)] + \ldots$$
$$\ldots + \varphi_{z_{n-1}}[(\xi_{nx_1} + \xi_{nx_2} z_1 + \ldots) - z_{n-1}(\xi_{1x_1} + \xi_{1x_2} z_1 + \ldots)] = 0$$

dove con $\xi_{ix_j}$, $\varphi_{z_k}$ indico le derivate parziali delle $\xi_i$ rispetto alle $x_j$ e della $\varphi$ rispetto a $z_k$. Equazione questa che può chiamarsi di *Killing* generalizzata.

Premettiamo il lemma di Bianchi generalizzato:

*Una geometria, se non è degenere, non può ammettere due trasformazioni infinitesime nelle $x_i$ proporzionali con le stesse traiettorie.*

Con un cambiamento di coordinate una trasformazione infinitesima può ridursi a $\frac{\partial}{\partial x_2}$ talchè $\xi_2 = 1, \xi_1 = \xi_3 = \ldots = \xi_n = 0$. Se l'equazione di Killing generalizzata è soddisfatta oltrechè da $\xi_2 = 1, \xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$, anche da $\varrho\xi_1$ dove $\varrho$ non è costante, deve essere:

$$\varphi_{z_1}(\varrho_{x_1} + \varrho_{x_2} z_1 + \ldots \varrho_{x_n} z_{n-1}) = 0$$

da cui $\varphi_{z_1} = 0$, e allora l'elemento lineare è degenere.

Se limitiamo ora la ricerca alle geometrie piane, abbiamo:

L'elemento lineare degenere può ridursi ad uno dei due tipi:

1°) $ds = dx\,\varphi(x)$, che, posto $X = \int \varphi(x)\,dx$ può ridursi alla forma $dX$;

2°) $ds = dx\,\varphi(x, y)$, che, con la trasformazione $x = X$, $\varphi(x, y) = Y^2$ può ridursi a $Y^2\,dX$.

Allora la più generale trasformazione finita che conserva l'elemento lineare è del tipo:

$$X' = F(X) \quad ; \quad Y' = \frac{Y}{\sqrt{F'(x)}}$$

con F segno di funzione arbitraria. Una delle geometrie di Lie (*Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, pag. 436) è degenere e può ridursi a questo secondo tipo con passaggio a coordinate polari; il gruppo studiato dal Lie è il gruppo *lineare omogeneo speciale* a 3 parametri, ed è un sottogruppo di quello a infiniti parametri da noi considerato.

Per trovare ora tutte le geometrie non degeneri con un gruppo di movimenti, poichè un gruppo con più di tre parametri, possiede un sottogruppo a tre parametri, così cominciamo con lo studiare quelle delle geometrie che ammettono un gruppo a uno, a due, a tre parametri e ci serviremo all'uopo della tabella di Lie (opera succitata, vol. III, pag. 57) che dà un tipo canonico a cui si riducono le trasformazioni infinitesime generatrici di tali gruppi, trascurando quelli con due trasformazioni infinitesime proporzionali.

Tralasciando di riprodurre qui i risultati a cui portano i gruppi ad uno e a due parametri della citata tabella, non suscettibili di semplice interpretazione, passiamo ai gruppi a tre parametri:

Il gruppo (pag. 57, § 14, n. 3):

$$(1) \qquad \boxed{q\,,\ p\,,\ xp + cyq}$$

fornisce per sostituzione nell'equazione di Killing tre equazioni che, integrate, danno $\varphi = z^{\frac{1}{1-c}}$ a meno di un fattore costante; e per l'elemento lineare avremo:

$$ds = dx\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{1-c}}$$

che può chiamarsi elemento lineare della geometria Euclidea generalizzato, poichè per $c = -1$ diviene $ds = \sqrt{dx\,dy}$; e a cui si riduce ovviamente il primo invariante di Lie [vol. III, pag. 436].

Definiamo ora per questa geometria l'invariante di due direzioni uscenti da un punto (angolo) e troviamone una rappresentazione sul piano euclideo.

Considero il gruppo prolungato del gruppo dato le cui trasformazioni infinitesime generatrici sono le trasformazioni del gruppo prolungate due volte mediante l'introduzione delle variabili $z = \frac{dy}{dx}$, $Z = \frac{dY}{dX}$, e integro il sistema di equazioni alle derivate parziali che si ottiene uguagliando a zero tali trasformazioni. Si trova:

$$p = 0\,;\ q = 0\,;\ xp + cyq + (c-1)\,z\frac{\partial}{\partial z} + (c-1)\,Z\frac{\partial}{\partial Z} = 0\,.$$

Integrando si ha: $\log\frac{z}{Z} = \text{cost.}$, e l'invariante cercato è appunto $\log\frac{z}{Z}$ che gode della proprietà additiva.

Le geodetiche sono linee rette.

Il gruppo (pag, 57; n. 3, § 14):

(2) $$\boxed{q\,,p\,,xp+(x+y)\,q}$$

fornisce per sostituzione nell'equazione di Killing tre equazioni che, integrate, danno $\varphi = e^{-z}$, onde, a meno di una costante, abbiamo per $ds$ la forma

$$ds = dx\, e^{-\frac{dy}{dx}}$$

che è il quarto invariante di Lie (vol. III, pag. 436).

Volendo definire l'invariante di due direzioni per una tale geometria, dovremo, operando come precedentemente, integrare il sistema:

$$q = 0\,,p = 0\,,xp+(x+y)\,q+\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial Z}=0$$

e l'invariante cercato è $z - Z$ di cui è evidente l'interpretazione sul piano euclideo. Esso è additivo. Le geodetiche sono linee rette: $y = mx + n$

La distanza di due punti in termini finiti è data da:

$$e^{-m}\int_{x_0}^{x_1} dx = e^{-m}(x_1 - x_0)\,.$$

Il gruppo (pag. 57, n. 3)

$$\boxed{p\,,xp+yq\,,x^2p+(2xy+y^2)\,q}$$

fornisce per sostituzione nell'equazione di Killing tre equazioni

$$\varphi_x = 0 \quad , \quad \varphi + y\,\varphi_y = 0 \quad , \quad y\,\varphi_y + 2\,\varphi_z\,(1+1)\,z = 0$$

da cui integrando:

$$\varphi = \frac{\sqrt{1+z}}{y}$$

e quindi abbiamo per $ds$

$$ds = dx\,\frac{\sqrt{1+\frac{dy}{dx}}}{y} = \sqrt{\frac{dx^2+dx\,dy}{y^2}}$$

che è l'elemento lineare della geometria non euclidea. In Sophus Lie è dato nella forma geodetica (pag. 436, vol. III). Si può domandare ora, se il gruppo dei movimenti può avere più di tre parametri. Quantunque sia

geometricamente intuitivo che ciò non può essere, fissiamo un gruppo a tre parametri entro a questo gruppo, diamo a $ds$ la forma nota corrispondente e, sostituitala nell'equazione di Killing, risolviamo questa rispetto a $\xi$ e $\eta$, trasformazioni infinitesime generatrici.

Per il gruppo (1) abbiamo, posto $\frac{1}{1-c} = m$, e sostituendo a $\varphi$, $z^m$:

$$z^m\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + m\frac{\partial\eta}{\partial y} - m\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + mz^{m-1}\frac{\partial\eta}{\partial x} + z\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}z^2 = 0$$

da cui:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + m\frac{\partial\eta}{\partial y} - m\frac{\partial\xi}{\partial x} + mz^{-1}\frac{\partial\eta}{\partial x} + z^{1-m}\frac{\partial\xi}{\partial y} - z^{2-m}\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0$$

e se $m$ è diverso da 2 [1], si ha ovviamente:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}(m-1) = m\frac{\partial\eta}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0$$

onde

$$\xi = Kx + K' \quad , \quad \eta = Kcy + K''$$

cioè il gruppo ha tre parametri. A identico risultato si perviene negli altri casi.

Termino dando un quadro dei possibili tipi di $ds$ trovati:

1° degeneri:

$$ds = dX \quad , \quad ds = Y^2\,dX$$

2° non degeneri:

$$ds = dx\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{1-c}} \quad ; \quad ds = dx\,e^{-\frac{dy}{dx}}$$

$$ds = \sqrt{\frac{dx^2 + dx\,dy}{y^2}}.$$

[1] Se $m = 2$ si perviene allo stesso risultato. Se $m = 1$, $ds$ è degenere.

**Astronomia.** — *Il riflettore prismatico dell'Osservatorio di Arcetri.* Nota di GIORGIO ABETTI, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

Qualche anno fa, avendo avuto occasione di usare fotograficamente il prisma obiettivo di Merz-Secchi con l'equatoriale di Cauchoix all'Osservatorio del Collegio Romano (1), esprimevo la speranza di poter continuare le stesse ricerche con uno strumento più luminoso e più adatto per l'uso fotografico. Mi si è presentata l'occasione all'Osservatorio di Arcetri il quale nel 1919 aveva avuto in dono dal sig. Alberto Peratoner il suo equatoriale di 16 cm. Nel 1921 questo venne montato nella cupola ovest dell'Osservatorio (2) e sulla sua montatura parvemi si dovesse bene adattare una camera fotografica spettrale.

Dopo aver discusso col dott. Villiger, capo della sezione astronomica della Casa Zeiss, le varie possibilità che si presentavano per l'attuazione di un tale progetto, venne concluso per un riflett re con prisma obiettivo. Le parti ottiche e il tubo del riflettore da costruirsi dalla Casa Zeiss, il restante della montatura dal meccanico dell'Osservatorio, E. Righini, che già aveva eseguito quella dell'equatoriale Peratoner. La combinazione di un riflettore con prisma obiettivo, per quanto poco comune, non è nuova, essendo già in uso all'Osservatorio di Harvard, ed i suoi vantaggi più notevoli in contrapposto all'uso di un obiettivo astrofotografico, sono la maggiore luminosità che, a parità di apertura, si raggiunge con lo specchio per causa dell'acromatismo e la possibilità di ottenere in fuoco tutto lo spettro dall'estremo rosso all'estremo violetto.

Invece di un sol prisma obiettivo venne stabilito di costruirne due, sia per poter variare la dispersione con l'uso di uno od ambedue i prismi, o ruotando l'uno rispetto all'altro, sia perchè era più facile ottenere blocchi di vetro omogenei per prismi di minore angolo rifrangente.

Il riflettore ed i prismi giunsero in Arcetri sul finire dello scorso anno, ed ora completata la montatura lo strumento è così costituito: uno specchio parabolico di 300 mm. di diametro e della distanza focale di metri 2,25 è portato da un tubo alla estremità dell'asse di declinazione opposta a quella alla quale trovasi il cannocchiale, prima esistente, con un obiettivo di Steinheil

(1) Memorie della Soc. astr. ital., nuova serie, vol. I, pag. 15 e pag. 149, 1920.

(2) A. Abetti, *La rettificazione dell'equatoriale Peratoner ad Arcetri.* Memorie della Soc. astr. ital., nuova serie, vol. II, pag. 97, 1921.

di 16 cm. di apertura che serve da guida. Il tubo del riflettore, in lamiera di alluminio, è portato da un supporto di alluminio fuso che può ruotare attorno all'asse di declinazione di un angolo di 20°. Sulla parte superiore del tubo sono montati due prismi con l'angolo rifrangente l'uno di 6°,1, l'altro di 8° e rispettivamente di 265 mm. e 230 mm. di apertura. Le loro montature sono indipendenti l'una dall'altra così che si può adoperare uno solo od ambedue i prismi, e di più sono provviste di cerchi di posizione che permettono di ruotare i prismi attorno all'asse ottico dello specchio. In tal modo si può far variare l'angolo rifrangente combinato dei due prismi fra 14° e 2° e quindi la dispersione. I due prismi sono di vetro di Jena n 0,118 con l'indice di rifrazione per la riga D: $\mu_D = 1{,}6129$ e la dispersione media da $H_\alpha$ ad $H_\beta$ di 0,0166, sono dunque di flint silicato comune, molto simile a quello del prisma Merz-Secchi.

Il riflettore essendo del tipo newtoniano, porta sulla estremità superiore del tubo, dietro ai prismi, uno specchio piano di forma ellittica con l'asse maggiore di 125 mm., inclinato di 45° sull'asse dello specchio principale. L'immagine degli spettri viene raccolta sulla lastra fotografica di dimensioni $6\frac{1}{2} \times 9$ cm., che trova posto ad un lato del tubo in apposito porta lastre aggiustabile nel fuoco e in angolo di posizione.

Alla rettifica del riflettore nella deviazione minima dei prismi si provvede col movimento sopra accennato del tubo del riflettore attorno all'asse di declinazione che ha un'ampiezza di 20°, 10° verso il nord e 10° verso il sud, così che l'angolo di deviazione, che risultò di 8°,8, può venire invertito.

Varî tipi di lastre fotografiche mi hanno servito per i primi esperimenti che ho eseguito per determinare le qualità ottiche e la potenza dello strumento. Con lastre pancromatiche lo spettro, per le stelle della classe *A* della classificazione di Draper, si estende dall'estremo violetto ($\lambda$ 3550) al rosso ($\lambda$ 6600) tutto perfettamente in fuoco, con le righe dell'idrogeno nette e distinte su tutta l'estensione dello spettro. Con ambedue i prismi si ha una dispersione sulle lastre di 26 mm. da $H_\alpha$ ad $H_\xi$ e la scala lineare nelle varie regioni risulta:

ad $H_\theta$ , 1 mm. = 46 A
ad $H_\delta$ , 1 mm. = 63 A
ad $H_\beta$ , 1 mm. = 116 A
ad $H_\alpha$ , 1 mm. = 293 A.

Per quanto riguarda la luminosità, su lastre rapide (rapidità da 16° a 17° della scala Scheiner) occorre, per una stella di terza grandezza, una posa di $50^s$ per ottenere uno spettro di densità sufficiente e dell'altezza di un quarto di millimetro necessaria per distinguere le righe. Questa altezza si ottiene muovendo durante la posa il cannocchiale in ascensione retta per circa 30″. I logaritmi dei tempi di posa crescono per ogni classe di gran-

dezza di 0,46 così che per una stella di $6^m.0$ occorre una posa di 20 minuti, con un notevolissimo aumento di luminosità rispetto alla combinazione del prisma Merz-Secchi con l'equatoriale Cauchoix, come era facile prevedere.

Il riflettore prismatico potrà quindi servire per ricerche di vario genere di spettroscopia stellare, oltre che per quelle di fotometria fotografica o per l'osservazione diretta, quando si tolgano i prismi, ciò che si fa molto facilmente. Per la spettroscopia stellare la determinazione delle grandezze assolute, e quindi delle parallassi determinate con metodo spettroscopico, si presenta attuabile come lo indicano questi stessi primi esperimenti.

Avevo già dimostrato che dalla larghezza delle righe violette dell'idrogeno si poteva dedurre per le stelle della classe *A* un criterio sulla loro grandezza assoluta, e di più che la larghezza della riga K doveva fornire un criterio molto preciso di classificazione (1). L'uno e l'altro fatto sono stati confermati da altri autori. Lindblad trova che la riga $H\gamma$ si allarga procedendo dalla classe *B5* alla *A3*, essendo gli estremi limiti rappresentati da stelle luminose come *α Cygni* e *α Leonis* con righe sottili dell'idrogeno, e dal debolissimo compagno di $o_2$ *Eridani* con righe molto larghe (2).

Adams e Joy trovano che le stelle della classe *A* si possono dividere in due categorie, l'una con spettri a righe ben definite intrinsecamente più luminose delle altre con righe molto diffuse e ciò in probabile relazione con la loro varia densità. Inoltre una esatta classificazione basata sull'apparire e scomparire e sull'intensità delle righe dell'elio e dell'arco, permette a questi autori di determinare la grandezza assoluta di stelle comprese fra le classi *B7* ed *F2* (3). Le variazioni di intensità e larghezza delle righe H e K del calcio sono usate dagli osservatori di Harvard come un importante criterio di classificazione delle stelle di classe *A* e specialmente la riga K che, come è stato già in precedenza notato (4), comparisce strettissima nella classe *B8* e cresce rapidamente in larghezza ed intensità nelle seguenti suddivisioni della classe *A*.

Resta quindi indicata la via per giungere alla determinazione delle parallassi per le stelle della classe *A* in base a questi risultati e in base al sistema di Monte Wilson. Per le classi più avanzate, l'estensione dello spettro che si ottiene con questo strumento, specialmente nella regione violetta, fa pure sperare che si possa raggiungere lo stesso scopo con analoghi criterî.

(1) Memorie della Soc. astr. ital., nuova serie, vol. I, pag. 149, 1920.

(2) Lindblad, *Spectrophotometric methods for determining stellar luminosity*. Contrib. Mount Wilson, n. 228, pag. 17, 1922.

(3) Adams and Joy, *A spectroscopic method of determining the absolute magnitude of A-type stars*. Contrib. from Mount Wilson Observatory, n. 244, 1922.

(4) Cfr. anche Leonard, *An investigation of the spectra of visual double stars*. Lick Observatory Bulletin, n. 343, pag. 172, 1923.

**Astronomia fisica.** — *Preliminari alla determinazione della estinzione della luce stellare nell'atmosfera di Roma* (1). Nota di GIOVANNI L. ANDRISSI, presentata dal Corrisp. G. ARMELLINI.

Il chiño prof. G. Armellini, in una Nota (2) sulla estinzione atmosferica a Roma, faceva rilevare che vi era una notevole differenza fra i valori della estinzione di Potsdam e quelli osservati a Roma; e quindi tra i valori trovati dal prof. Bianchi, che concordano con quelli di Potsdam, ed i proprî. Il prof. Armellini aggiungeva che sarebbe stato bene approfondire questa irregolarità con nuovi studî: è questo appunto il lavoro che mi sono accinto a compiere e per il quale ho chiesto al prof. Armellini, direttore del R. Osservatorio del Campidoglio, il permesso di usare gli istrumenti necessari. Egli, gentilmente, mise a mia disposizione un eccellente equatoriale Merz e un fotometro ad estinzione di Toepfer.

Indicando con $\varrho$ il rapporto tra il valore della estinzione del luogo e quella osservata a Potsdam dal Müller, i valori fino ad ora osservati in Italia sono i seguenti:

*Roma* (E. Bianchi) (3) $\varrho = 1.02$; (G. Armellini) (4) $\varrho = 1.96$ — *Catania* (A. Bemporad) (5) $\varrho = 3.00$ — *Napoli* (A. Bemporad) (6) $\varrho = 2.50$; (E. Guerrieri) (7) $\varrho = 2.38$ — *Padova* (E. Padova) (8) $\varrho = 2.34$.

Come vediamo si trova, in generale, una forte differenza fra l'estinzione nelle varie città d'Italia e quella di Potsdam. Il prof. Bemporad (9) faceva notare in una sua Nota che le stagioni possono recare sensibili perturbazioni; e cioè che nell'inverno la estinzione differenziale risulta prossimamente identica a quella di Potsdam, mentre nell'estate può salire al doppio, al triplo e quadruplo.

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio astronomico del Campidoglio.

(2) Cfr. G. Armellini, *Sull'estinzione della luce stellare nella atmosfera di Roma*. Atti della R. Accad. Lincei, 1918.

(3) Cfr. G. Bianchi, *Primo saggio sulla estinz. atmosf. a Roma*. Mem. Spettr. Ital., 1915.

(4) Cfr. Nota citata.

(5) A. Bemporad, *Ricerche sulla trasparenza atmosferica ecc.*, Rivista di Astron. e scienze affini, 1912.

(6) A. Bemporad, *L'estinzione a Capodimonte*. Rivista citata.

(7) G. Guerrieri, *Saggio di determinazione dell'estinz. atm. a Capodimonte*. Pubbl. Osserv. Capodimonte.

(8) E. Padova, *Determinazione della estinz. atmosf. a Padova*. Atti R. Istituto Veneto, tomo LXXIII.

(9) A. Bemporad, *Misure assolute e differenziali della estinz. atmosferica*. Memorie degli Spettr. ital., 1915.

Ammettendo questa ipotesi, si potrebbe conciliare la diversità notata fra le osservazioni del prof. Armellini e quelle del prof. Bianchi, giacchè le osservazioni del prof. Bianchi vennero fatte in inverno mentre quelle del prof. Armellini in estate. Tenendo conto inoltre che i valori dati dal Müller sono i valori medi di osservazioni condotte per più anni, e più stagioni, si potrebbe avere anche una spiegazione degli alti valori ottenuti nelle varie città, nominate sopra, pensando che, in genere, vennero fatte in stagione estiva e solo per alcuni mesi. Ritornerò sull'argomento appena avrò ultimate le osservazioni che stò compiendo. Prima però di iniziare il lavoro sulla estinzione ho voluto calcolare la *costante k del fotometro*. Essa era già stata trovata dal prof. Armellini (1) eguale a 0.186. Seguii in parte gli stessi metodi usati dal prof. Armellini e cioè utilizzando coppie di stelle che avessero: grande differenza di splendore, poca diversità di colore, e prossimità nel cielo. Fatte le misure con queste coppie con l'obiettivo libero e cioè di 117 mm. le rifeci con l'obiettivo diaframmato a 50 mm. Fatte queste osservazioni mi valsi di un altro metodo e cioè coll'osservare le stelle con obiettivo coperto da diaframmi diversi: uno di 50 mm. e l'altro di 75 mm.

La tabella II dà i risultati del primo metodo con le coppie di stelle e obiettivo libero. Con $\Delta G$ ho indicato la differenza di grandezza fra le componenti la coppia, con $\Delta L$ la differenza delle letture e con $k$ la costante cercata e N il numero delle osservazioni. La tabella III dà le osservazioni delle stesse coppie con obiettivo diaframmato a 50 mm. Nella tabella IV il diametro dell'obiettivo era ridotto da 75 a 50 mm e quindi la grandezza della stella veniva ridotta di 0.880456: $k$ è ottenuto facendo il rapporto tra 0.880456 e $\Delta L$ (diff. lettura fatta con obiettivo a 75 mm. e diaf. a 50 mm.). Nella tabella V l'obiettivo da mm. 117 veniva ridotto a mm. 50 e quindi la grandezza stellare era ridotta di Mg = 1,846080. Nella tabella I l'obiettivo era ridotto da 117 a 75 mm. e quindi la stella di Mg. 0.965625.

TABELLA I.

| DATA | Mg. | Stella | Colore | $\Delta L$ | $k$ | N | *Annotazioni* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1923 | | | | | | | |
| 25 gennaio | 0.72 | Procione | GW — | 5.25 | 0.183 | 10 | cielo sereno L. P. Q. |
| 26 » | 1.94 | $\alpha$ Gemelli | GW — | 5.37 | 0.181 | » | » » |
| » » | 0.72 | Procione | GW — | 5.08 | 0.190 | » | |
| 27 » | 1.94 | $\alpha$ Gemelli | GW — | 5.06 | 0.190 | » | » » |
| » » | 1.51 | $\beta$ Gemelli | WG + | 5.03 | 0.191 | » | |
| » » | .. | Rigel | .. | 5.21 | 0.184 | » | |
| 28 » | 1.51 | $\beta$ Gemelli | WG + | 5.18 | 0.186 | » | |
| » » | .. | Rigel | .. | 5.19 | 0.186 | » | |

Valore medio . . . $k = 0.186$

(1) Cfr. Nota citata.

TABELLA II.

| DATA | (*) Coppia | Colore | $\Delta G$ | $\Delta L$ | $k$ | N | *Annotazioni* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1923 | | | | | | | |
| 14 gennaio | 1 | GW ; G + | 4.98 | 28.80 | 0.172 | 5 | cielo sereno L. U. Q. il 10 |
| 15 » | 7 | GW — ; GW | 4.57 | 25.40 | 0.180 | 10 | » » |
| 16 » | 7 | GW — ; GW | 4.57 | 24.90 | 0.183 | 5 | « » |
| 17 » | 3 | GW — ; GW — | 4.80 | 23.20 | 0.199 | » | » » L. N. |
| 18 » | 2 | G — ; WG — | 6.70 | 35.60 | 0.188 | » | » » |
| » » | 8 | GW — ; GW | 5.68 | 32.20 | 0.170 | » | |
| 20 » | 2 | G — ; WG — | 6.70 | 35.79 | 0.187 | 10 | » » |
| » » | 8 | GW — ; GW | 5.68 | 30.10 | 0.188 | » | |
| 22 » | 1 | G + ; GW | 4.98 | 25.90 | 0.190 | 5 | » » |
| » » | 3 | GW — ; GW — | 4.80 | 24.60 | 0.195 | » | |
| » » | 8 | GW — ; GW | 5.68 | 31.40 | 0.180 | » | |
| 24 » | 3 | GW — ; GW — | 4.80 | 25.30 | 0.189 | » | » » |
| » » | 9 | WG + ; W | 5.50 | 30.90 | 0.178 | » | |
| 25 » | 10 | W + ; W + | 4.84 | 25.90 | 0.186 | 8 | » » L. P. Q. |
| » » | 4 | GW ; W + | 4.65 | 24.10 | 0.192 | 5 | |
| » » | 8 | GW — ; GW | 5.68 | 30.20 | 0.187 | » | |
| 26 » | 1 | G + ; GW | 4.98 | 26.60 | 0.187 | » | » » |
| » » | 4 | GW ; W + | 4.65 | 24.50 | 0.189 | » | |
| » » | 3 | GW — ; GW — | 4.80 | 24.90 | 0.192 | » | |
| 27 » | 9 | WG + ; W | 5.50 | 29.00 | 0.189 | » | » » |
| » » | 7 | GW — ; GW | 4.57 | 23.40 | 0.195 | » | |

Valore medio . . . $k = 0.186$

TABELLA III.

| DATA | (*) Coppia | Colore | $\Delta G$ | $\Delta L$ | $k$ | N | *Annotazioni* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1923 | | | | | | | |
| 4 febbraio | 9 | WG + ; W | 5.50 | 29.00 | 0.189 | 5 | cielo sereno L. P. l'1 |
| » » | 8 | GW — ; GW | 5.68 | 23.00 | 0.172 | » | |
| 7 » | 7 | GW — ; GW | 4.57 | 24.70 | 0.185 | » | » » |
| » » | 8 | GW — ; GW | 5.50 | 29.10 | 0.191 | » | |
| » » | 3 | GW — ; GW — | 4.80 | 25.50 | 0.188 | » | |
| » » | 2 | G — ; WG — | 6.70 | 35.00 | 0.191 | » | |
| 9 » | 3 | GW — ; GW — | 4.80 | 24.80 | 0.193 | » | » » L. U. Q. l'8 |
| » » | 8 | GW — ; GW | 5.68 | 29.90 | 0.190 | » | |
| » » | 9 | WG + ; W | 5.50 | 30.00 | 0.183 | » | |
| 10 » | 3 | GW — ; GW | 4.80 | 24.90 | 0.191 | » | » » |
| » » | 7 | GW — ; GW | 5.68 | 24.90 | 0.183 | » | |

Valore medio . . . $k = 0.186$

(*) Coppie: (1) $\alpha$ Tauri ; 83 Tauri (2) $\alpha$ Auriga ; 3157 P. D.
(3) $\gamma$ Orionis ; 3234 P. D. (4) $\beta$ Tauri ; 3257 P. D.
(5) $\alpha$ Persei ; 1974 P. D. (6) $\alpha$ Ariete ; 1223 P. D.
(7) $\alpha$ Gemelli ; 4671 P. D. (8) $\alpha$ Canis Minoris; 4680 P. D.
(9) $\beta$ Gemelli ; 4756 P. D. (10) $\beta$ Auriga ; 3643 P. D.

TABELLA IV.

| DATA | Mg. | Stella | Colore | $\Delta$L | $k$ | N | *Annotazioni* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1923 | | | | | | | |
| 4 febbraio | 1.51 | $\beta$ Gemelli | WG + | 4.7 | 0.187 | 5 | cielo sereno L. P. l'1 |
| » » | 0.72 | Procione | GW — | 4.9 | 0.179 | » | |
| 7 » | 1.94 | $\alpha$ Gemelli | GW — | 4.9 | 0.179 | » | » » |
| » » | 0.72 | Procione | GW — | 4.4 | 0.200 | » | |
| » » | 0.43 | $\alpha$ Auriga | WG | 4.6 | 0.191 | » | |
| 9 » | 0.72 | Procione | GW — | 5.0 | 0.176 | » | » » L. U. Q. l'8 |
| » » | 1.51 | $\beta$ Gemelli | WG + | 4.8 | 0.183 | » | |
| 10 » | 1.94 | $\alpha$ Gemelli | GW — | 4.7 | 0.187 | » | » » |
| » » | .. | $\delta$ Orionis | .. | 4.6 | 0.191 | » | |
| » » | .. | Rigel | .. | 4.7 | 0.187 | » | |
| » » | 2.06 | $\gamma$ Orionis | GW — | 4.9 | 0.179 | » | |
| » » | 1.15 | $\alpha$ Tauri | G + | 4.7 | 0.187 | » | |

Valore medio . . . $k = 0.185$

TABELLA V.

| DATA | Mg. | Stella | Colore | $\Delta$L | $k$ | N | *Annotazioni* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1923 | | | | | | | |
| 31 gennaio | .. | Rigel | .. | 9.83 | 0.188 | 10 | cielo sereno |
| 4 febbraio | 1.51 | $\beta$ Gemelli | WG + | 9.80 | 0.188 | 5 | » » L. P. l'1 |
| » » | 0.72 | Procione | GW — | 9.80 | 0.188 | 5 | |
| 7 » | 1.94 | $\alpha$ Gemelli | GW — | 10.00 | 0.184 | 5 | » » |
| » » | 0.72 | Procione | GW — | 9.50 | 0.194 | » | |
| » » | .. | Rigel | .. | 9.20 | 0.200 | » | |
| » » | .. | $\delta$ Orionis | .. | 9.30 | 0.197 | » | |
| » » | 0.43 | $\alpha$ Auriga | WG | 9.60 | 0.191 | » | |
| 9 » | 2.06 | $\gamma$ Orionis | GW — | 10.30 | 0.179 | » | » » L. U. Q. l'8 |
| » » | 0.72 | Procione | GW — | 10.30 | 0.179 | » | |
| » » | 1.51 | $\beta$ Gemelli | WG + | 10.00 | 0.184 | » | |
| 10 » | 1.15 | $\alpha$ Tauri | G + | 9.80 | 0.188 | » | » » |
| » » | 2.06 | $\gamma$ Orionis | GW — | 9.90 | 0.186 | » | |
| » » | .. | Rigel | .. | 9.90 | 0.186 | » | |
| » » | 1.94 | $\alpha$ Gemelli | GW — | 9.90 | 0.186 | » | |
| » » | .. | $\delta$ Orionis | .. | 9.70 | 0.190 | » | |
| » » | .. | Betelgeuse | .. | 10.40 | 0.176 | » | |

Valore medio . . . $k = 0.187$

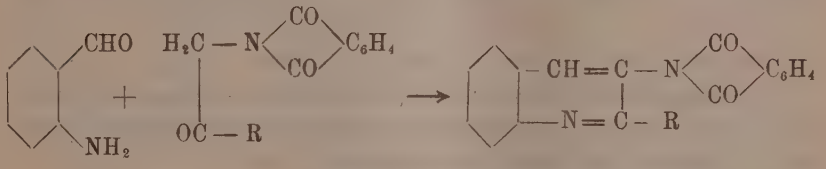
Riassumendo i valori ottenuti dalle varie tabelle, abbiamo come media $\mathbf{k = 0.186}$, che concorda perfettamente con quello già trovato [1] dal professore Armellini.

[1] Vedi nota citata.

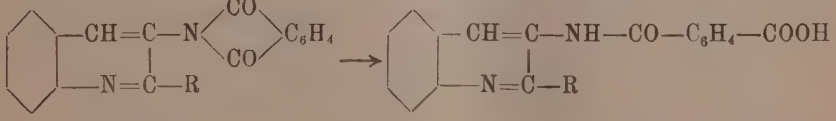
**Chimica.** — *β-Amino-e β-Ossi-chinoline* [1]. Nota di S. Berlingozzi, presentata dal Socio A. Piutti.

In alcune ricerche, recentemente pubblicate, G. Bargellini ed io [2] abbiamo ottenuti alcuni derivati chinolinici β-sostituiti, condensando l'*o*-aminobenzaldeide con l'acetonil-ftalimide e con la fenacil-ftalimide.

La reazione verosimilmente conduce drapprima alla β-ftalimido-chinolina



nella quale, per successiva azione dell'idrato sodico presente, si apre l'anello ftalimidico e si forma l'acido corrispondente



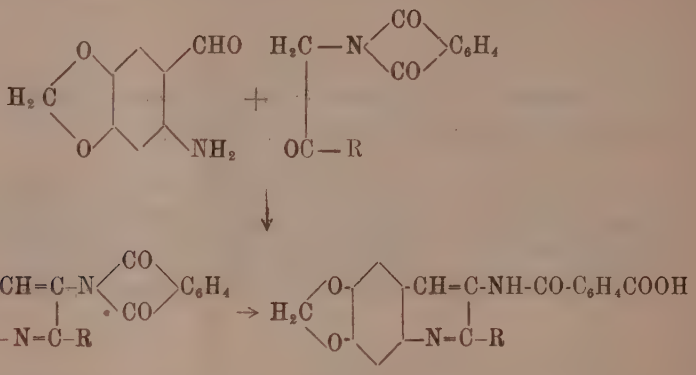
Da questo composto si passa poi alla β.amino-chinolina per ebullizione con acido cloridrico acquoso che elimina il residuo ftalico. Ed a sua volta la β-amino-chinolina, per azione dell'acido nitroso, fornisce il corrispondente β-ossi-derivato.

Le suddette trasformazioni si compiono in modo facile e con buon rendimento, sì che mostrava un certo interesse l'indagare se la reazione avesse carattere generale; tanto più perchè non si conosce ancora un metodo generale di preparazione delle chinoline β-sostituite, le quali sono perciò poco note. A tale scopo volli estendere le esperienze partendo sia da altre *o*-amino-aldeidi sia da *o*-amino chetoni; ed in questa Nota sono esposti i risultati ottenuti dall'azione dell'acetonil- e della fenacil-ftalimide sul 6-amino-pi-

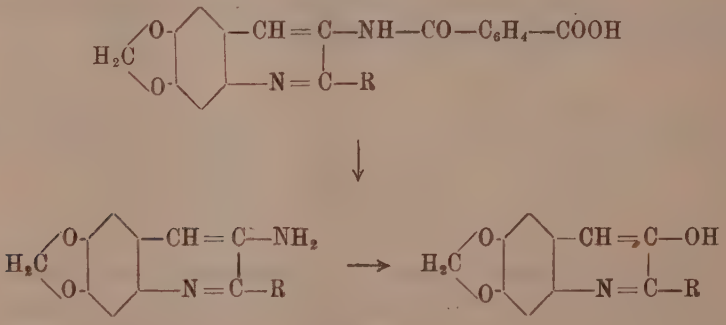
[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Napoli.

[2] Gazz. chim. *53*, I, 3 (1923).

peronalio. Anche questa *o*-amino-aldeide si condensa con tali composti in modo del tutto analogo



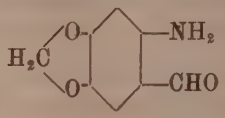
I prodotti ottenuti forniscono anch'essi, per azione dell'acido cloridrico, le *β*-amino-chinoline; e queste a loro volta per azione dell'acido nitroso dànno luogo ai corrispondenti *β*-ossi-derivati



Sono in corso altre esperienze per condensare l'acetonil- e la fenacil-ftalimide con l'acido isatinico, e spero di riferire in proposito fra breve.

Parte sperimentale (Con la collaborazione di Clelia Napolitano).

*6-amino-piperonalio.*



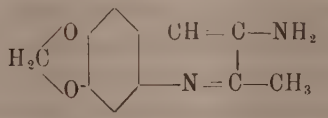
E' noto da tempo come nella riduzione del 6-nitro-piperonalio per

mezzo dei comuni riducenti, la tendenza del gruppo aldeidico a condensarsi col gruppo aminico formatosi, dia luogo alla formazione di metilen-diossi-antranile (1), e non si ontenga il 6-amino piperonalio. Recentemente Rilliet e Kreitmann (2) hanno eliminato questo inconvenient condensando prima il nitro-piperonalio con la *p*-toluidina, riducendo con solfuro sodico la nitro-piperoniliden-*p*-toluidina e saponificando il risultante amino-derivato. Noi abbiamo anche osservato che il 6 amino-piperonalio si può ottenere (sebbene con rendimento meno soddisfacente) riducendo il nitro-piperonalio direttamente con solfato ferroso e ammoniaca a caldo.

*Condensazione del 6-amino-piperonalio con l'acetonil-ftalimide.* — Quantità corrispondenti dei due composti sono sciolte separatamente in acqua bollente. La soluzione dell'aldeide viene trattata con soda caustica concentrata; dopo di che si aggiunge l'altra soluzione e si lascia in riposo per 24 ore. Acidificando poi con acido acetico si ottiene un precipitato bianco pulverulento, quasi insolubile nell'acqua, nell'alcool e negli altri comuni solventi. Si purifica sciogliendolo nell'idrato sodico diluito ed aggiungendo quindi acido acetico fino a reazione lievemente acida. Si presenta in minutissimi aghetti bianchi che fondono con decomposizione verso i 250°. Rendimento 65 %.

Il composto si scioglie a freddo nei carbonati alcalini e riprecipita per acidificazione. L'analisi e il comportamento di esso dimostrano che nel prodotto di condensazione fra amino-piperonalio e acetonil-ftalimide è avvenuta, come in casi analoghi precedenti (3), l'apertura dell'anello ftalimidico con formazione dell'acido carbossilico corrispondente.

*Metilendiossi-α metil-β amino-chinolina.*



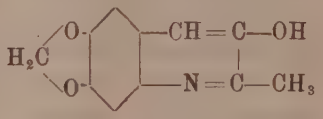
Si ottiene sottoponendo il composto precedente all'azione dell'acido cloridrico al 20 % bollente. Si ottiene ben presto la soluzione completa. Dopo due ore di ebullizione si lascia raffreddare e si alcalinizza con ammoniaca: precipita così una sostanza gialla che si purifica dall'alcool acquoso. Pagliette appena colorate in giallo, fusibili a 210°, abbastanza solubili nell'alcool, pochissimo nell'acqua. Le soluzioni acide diluite mostrano una bella opalescenza. Rendimento 60 %.

(1) Cfr. Friedländer e Schreiber. Ber. *28*, 1385 (1895).
(2) Compt. rend. *157*, 782.
(3) Gazz. chim. *53*, I, 6-8 (1923).

*Acetil-derivato*, $C_{13}H_{12}O_3N_2$. — Si ottiene scaldando per qualche ora la base con acido acetico e anidride acetica, gettando poi in acqua e alcalinizzando con ammoniaca. Si purifica dall'alcool bollente. Ciuffi di aghetti bianchissimi fusibili a 266°-267°.

*Picrato*. — Si separa dalla soluzione acetica della base trattata con soluzione acquosa di acido picrico. Prismetti giallo-citrini fusibili con decomposizione verso 225°.

*Mitilendiossi-α metil-β ossi-chinolina.*

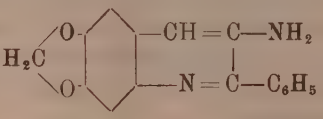


La metilendiossi-α metil-β amino-chinolina viene diazotata trattandone la soluzione cloridrica con la corrispondente quantità di nitrito sodico in soluzione acquosa, raffreddando con ghiaccio. Si decompone poi il diazo-derivato riscaldando gradatamente e mantenendo per alcuni minuti all'ebullizione. L'ossi-derivato così ottenuto viene precipitato trattando con acetato sodico in soluzione concentrata. La metilendiossi-α metil-β ossi-chinolina si cristallizza dall'alcool bollente. Scagliette giallo-paglierine, pochissimo solubili nell'acqua, abbastanza nell'alcool, fusibili con decomposizione a 284°-285°. La soluzione alcoolica del composto si colora in rosso-sangue per l'aggiunta di cloruro ferrico, e tale colorazione scomparisce per aggiunta di acido cloridrico. Le soluzioni acide sono opalescenti. Rendimento 30 %.

*Condensazione del 6-amino-piperonalio con la fenacil-ftalimide*. — Si effettua in modo simile a quella dell'amino-piperonalio con l'acetonil-ftalimide. Il prodotto di condensazione è una polvere bianca microcristallina, quasi insolubile nell'acqua, pochissimo solubile nell'etere e nell'acetone, discretamente nell'alcool. Fonde con decomposizione verso 265°. L'analisi e il carattere di acido carbossilico dimostrano anche qui l'apertura dell'anello ftalimidico.

Da questo composto si ottengono col procedimento già descritto la β-amino e la β-ossi-chinolina che descriviamo sommariamente:

*Metilendiossi-α fenil-β amino-chinolina*

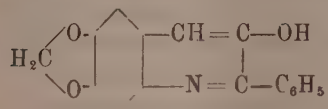


Aghetti giallo-paglierini fusibili a 202°, solubili nell'alcool, nell'acetone, poco nell'etere, pochissimo nell'acqua. Le soluzioni acide sono fluorescenti.

*Acetilderivato*. — Aghetti minutissimi bianchi lucenti, fusibili a 234°.

*Picrato*. — Aghetti giallo-citrini fusibili a 217° con decomposizione.

*Metilendiossi-α fenil-β ossi-chinolina.*



Scagliette lucenti giallo paglierine, quasi insolubili nell'acqua, solubili nell'alcool e nell'acetone, fusibili a 232°. La sua soluzione alcoolica si colora in rosso-aranciato per l'aggiunta di cloruro ferrico, e la colorazione scomparisce trattando con acido cloridrico. Le soluzioni acide sono opalescenti.

**Chimica.** — *Su alcuni bromo derivati dell'acenaftene* (1). Nota di REMO DE FAZI, presentata dal Socio PATERNÒ.

L'acenaftene, per quanto scoperto da oltre cinquanta anni (2), è ancora poco conosciuto in molti suoi derivati anche i più semplici, ed ancora più in alcuni particolari ed interessanti comportamenti. Ho perciò intrapreso lo studio di alcuni derivati bromurati e di alcune reazioni, anche per non lasciare intentate altre vie onde riuscire a spiegare la reazione colorata che l'acenaftene dà con le aldeidi cicliche (3).

In questa Nota comunico intanto i risultati ottenuti delle ricerche eseguite di alcuni bromo derivati dell'acenaftene.

Già Blumenthal (4) aveva studiato l'azione del cloro e del bromo sull'acenaftene e sull'acenaftilene, ed ottenne per azione del bromo sull'acenaftene un composto della formula $C_{12}H_9Br$. Altri ricercatori volsero la loro attenzione all'azione del bromo su questo idrocarburo (5). Il composto scoperto da Blumenthal fu isolato puro soltanto nel 1903 da Graebe (6): lo preparò con opportune modifiche del metodo Blumenthal, e dai prodotti di ossidazione ottenuti dal bromo-acenaftene $C_{12}H_9Br$, stabilì trattarsi del 4-bromo-acenaftene:

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Applicata della R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri di Roma.

(2) Berthelot, Jahresb. (1867), 59; Bull. Soc. Chem. (1868), 265 (I).

(3) R. de Fazi, Gazz. Chim. Ital., *46* (1916), a, 334.

(4) Blumenthal, Ber., *7* (1874), 1092.

(5) Kebler J. T., Am. Chem. Journ., *10* (1888), 217; Bamberger E., Ber., *21* (1888), 836; Ewan T. e Cohen J. B., Journ. Chem. Soc., *55* (1889), 578.

(6) Graebe, Ann. (1903), *327*, 85.

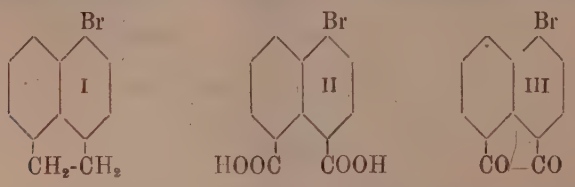
Nel 1910 tale costituzione fu confermata da Sachs e Mosebach (1) che l'ottennero preparandolo dal 4-amino-acenaftene.

Ho preparato il 4-bromo-acenaftene col metodo Graebe ed ho potuto constatare che variando il solvente, adoperando cioè il cloroformio invece dell'etere etilico, insieme al 4-bromo-acenaftene si forma in piccolissima quantità un composto in cristalli aghiformi bianchi che fondono a 169-170°. Dapprima ho pensato che si trattasse di un dibromo derivato dell'acenaftene ed ho perciò ripetuto le esperienze, impiegando una quantità doppia di bromo a quella necessaria per preparare il 4-bromo-acenaftene e diminuendo la quantità di cloroformio.

Se si opera nelle condizioni descritte nella parte sperimentale (2) e si svapora il cloroformio a temperatura ordinaria, resta una sostanza oleosa, che si discioglie in poco cloroformio; e per aggiunta di etere etilico alla soluzione cloroformica si deposita una sostanza in aghi bianchi, che cristallizzati dall'alcool etilico fondono a 169-170°.

Mentre dalla soluzione cloroformio etere, dopo distillazione dei solventi, rimane una sostanza semioleosa dalla quale per estrazioni con alcool etilico si riesce a separare del 4-bromo-acenaftene e un po' di acenaftene inalterato. La parte semioleosa che ancora rimane dopo le estrazioni con alcool etilico, e che all'analisi dà risultati concordanti per un bromo acenaftene $C_{12}H_9Br$ ho pensato fosse un nuovo bromo derivato e l'ho ossidato, con bicromato di sodio, in soluzione in acido acetico per poter studiare i composti di ossidazione che avrebbero potuto chiarire la costituzione di tale sostanza.

I prodotti di ossidazione che si ottengono sono un acido e un chinone, i cui punti di fusione sono rispettivamente 220-221° e 236,5-237°. Questi due composti all'analisi corrispondono ad un acido bromo-naftalin-dicarbonico e ad un bromo-acenaften-chinone; perciò in seguito a questi risultati ho pensato che la sostanza semioleosa fosse del 4-bromo-acenaftene (I) impuro di altri prodotti della reazione; e i due composti di ossidazione ottenuti: l'acido 4-bromo-naftalin-1-8-dicarbonico (II) e il 4-bromo-acenaften-chinone (III):




Però i punti di fusione di questi due composti già conosciuti sono 210° e 194°. Il primo è vicino a quello dell'acido da me ottenuto, mentre per il

(1) Sachs F. e Mosebach G., Ber., *43* (1910), 2473.

(2) La Nota completata della parte sperimentale sarà pubblicata sulla Gazzetta Chimica Italiana.

chinone vi è una differenza di oltre 40 gradi. Ma questa forte differenza nei punti di fusione non mi ha meravigliato, perchè per alcuni derivati dell'acenaftene non è cosa nuova (1) poichè è grande la difficoltà che talvolta si incontra per ottenerli allo stato puro.

Ma per dimostrare che realmente si trattasse del 4-bromo-acenaftene e dei relativi prodotti di ossidazione, era necessario determinare la posizione dell'atomo di bromo ed ho preferito trasformare l'acido bromo-naftalin-1-8-dicarbonico nel rispettivo ossi-acido, già conosciuto.

Per azione dell'idrato di potassio, su questo acido bromo-naftalin-dicarbonico ho ottenuto l'acido 4-ossi-naftalin-1-8-dicarbonico (IV):

Questo risultato dimostra chiaramente che l'acido è il 4-bromo-naftalin-1-8-dicarbonico, ed il chinone è perciò il 4 bromo-acenaften-chinone i quali fondono a 220-221° il primo, e a 236,5-237° il secondo.

Restava ancora a studiare l'altro composto, in bei cristalli aghiformi bianchi, fondente a 169-170°. Per i risultati analitici ottenuti è un tetrabromo-acenaftene: $C_{12}H_6Br_4$; ed è identico a quello ottenuto da Ewan e Cohen (2) per azione del bromo sul dibromo-acenaftilene V, e al quale dettero la formula VI:

Non ho eseguito altri studî su questo tetrabromo-acenaftene e non posso perciò confermare la formula di costituzione attribuitagli da Ewan e Cohen.

Queste ricerche che ho eseguito per altri scopi, indicano un nuovo e pratico metodo di preparazione del tetrabromo-acenaftene (VI) e stabiliscono che per azione del bromo sull'acenaftene, a seconda delle condizioni in cui si opera e della quantità di bromo che si fa reagire, si può ottenere o soltanto il 4 bromo-acenaftene, o il 4-bromo acenaftene insieme al tetrabromo-acenaftene.

(1) Secondo Sachs e Mosebach [Ber., *44* (1911) 2852], il 5-acetil-amino-acenaftene fonde a 192°; invece nel 1920 Rome F. M. e Dawies J. S. H. [Journ. Chem. Soc., *117* (1920) 1344] hanno dimostrato che fonde a 238°.

(2) Ewan T. e Cohen J. B., Journ. Chem. Soc., *55*, 578 (1889).

**Mineralogia.** — *Thomsonite associata a cabasite dei Monzoni* (1). Nota di GIUSEPPINA BELLINZONA, presentata dal Corrispondente LUIGI BRUGNATELLI.

Nel versante nord dei Monzoni, gruppo di monti classico per la mineralogia e la geologia, convergono verso il piano alcune vallette, o meglio canaloni, tra le quali quelle della traversellite e della cabasite, così chiamate per l'abbondanza colla quale in esse si riscontrano i detti minerali. Nella seconda di queste vallette, poco sopra la località dove si trova il calcare coi cristalli di pirite descritti dal prof. Tacconi (2), appare una massa di monzonite gabbrica che, al contatto col calcare, mostra numerose fenditure tappezzate da cristalli romboedrici di cabasite, sui quali sono impiantate, in gran numero, minute e compattissime sferulette di un minerale bianco, che ricordano quelle comuni della thomsonite. Al disopra di questi minerali si stende come una crosta a lucentezza tendente alla vitrea, dalla quale, nella parte inferiore, sporgono cristalli di cabasite. Tra la monzonite e la cabasite si osserva costantemente uno straterello di un minerale bruno con lucentezza grassa facilmente riconoscibile per granato, e più precisamente, dato il valore relativamente basso, rispetto ai granati, dell'indice di rifrazione, per un termine della grossularia. Non mancano, commisti col granato, cristalletti di titanite e forse anche di spinello, poichè in preparati nel ioduro di metilene concentratissimo ($n = 1{,}745 - Na$), oltre ai granuli di granato con indice di rifrazione più elevato, si osservano granuli perfettamente isotropi con indice di rifrazione alquanto inferiore.

La paragenesi dei minerali zeolitici mostra quindi che si formò dapprima la cabasite, quindi le sferulette sopra citate ed in seguito si ebbe una nuova generazione di cabasite, a meno che la crosta anzidetta non appartenga, in origine, all'altra parete delle fenditure, come sembrerebbe dimostrarlo il fatto che cristalli distinti di cabasite sono sviluppati al disotto della crosta stessa.

Il peso specifico della crosta determinato col Thoulet è uguale a: 2,106, che corrisponde a quello della cabasite, come pure concordano per la cabasite gli indici di rifrazione, che furono trovati estremamente vicini a: 1,491.

Per il minerale che costituisce le sferule si ebbero per il peso specifico valori alquanto variabili e ciò a motivo della quasi impossibilità di separarlo completamente dalla cabasite, come pure dai prodotti di alterazione,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Pavia diretto dal prof. Luigi Brugnatelli

(2) E. Tacconi, *Note mineralogiche.* Mem. R. Acc. dei Lincei, serie V, vol. 8, 1910, pag. 744, Roma.

che ne costituiscono la sottile zona superficiale. I valori trovati col Thoulet sono: 2,22, 2,25, 2,31, 2,34 e sono, come si vede, alquanto inferiori a quelli dati dai diversi autori per la thomsonite. Con due cristalli purissimi delle isole Fär Oer io ottenni per es.: 2,378. Tutti i pesi specifici furono determinati alla temperatura da 16° a 19°. I valori sopra riferiti corrispondono però abbastanza bene con quelli trovati dalla Riva [1] per la thomsonite di Casarza Ligure, la quale ha uno sviluppo analogo alle sferule dei miei esemplari, benchè quelle siano di dimensioni assai maggiori. Al microscopio le sferule mostrano una compattissima struttura feltrata che va sfibrandosi in una zona di alterazione alla periferia. Per gli indici di rifrazione si trovò che sono compresi tra 1,52 e 1,537. Ciò non corrisponde coi dati che tuttora vengono riportati dai trattati e cioè con quelli di Des Cloizeaux. Questi ultimi valori, convien notarlo, sono però errati come viene dimostrato dai dati di Schroeder van der Kolk [2], da quelli dello Scheit [3] e come fu dimostrato in modo indubbio dalla Riva (loc. cit.). I limiti da me determinati concordano coi valori dati da questi autori.

I dati fino ad ora esposti non lasciano alcun dubbio circa la natura thomsonitica delle sferule; pur tuttavia, ho creduto opportuno di eseguire anche l'analisi chimica, la quale data l'impossibilità, dimostrata anche dai pesi specifici, di ottenere un materiale puro, ha solo un valore diagnostico. I risultati ottenuti, tuttavia, entrano nei limiti delle analisi di questo minerale riportate dall'Hintze [4] e dal Doelter [5] e bastano per dimostrare che il minerale è effettivamente thomsonite. Riporto coi miei (I) i risultati ottenuti da von John (II) per la thomsonite delle Palle Rabbiose, pure nel gruppo dei Monzoni:

| | I | II |
|---|---|---|
| $SiO_2$ . . . . . | 36,80 | 39,24 |
| $Al_2O_3$ . . . . . | 27 06 | 27,90 |
| CaO . . . . . | 16,74 | 12,45 |
| MgO . . . . . | 0,22 | — |
| $Na_2O$ . . . . . | 3,25 | 7,95 |
| $K_2O$ . . . . . | tracce | 0,60 |
| $H_2O$ a 110° . . . | 1,98 | — |
| $H_2O$ al rosso . . . | 15,52 | 11,86 (totale) |
| | 101,57 | 100,00 |

[1] P. Riva, *Thomsonite del territorio di Casarza Ligure.* Rivista di min. e crist. italiana, vol. XLIII, pag. 5, Padova, 1914.

[2] Van der Kolk, *Tabellen zur Mikroskopischen Bestimmung* ecc. Wiesbaden, 1906, pag. 30.

[3] E. Scheit, *Eine regelmässige Verwachsung von Thomsonit und Natrolith.* Tschermk. min. petr Mittheilungen, vol. XXXI, pag. 493, Vienna, 1912.

[4] C. Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, vol. II, pag. 1668, Lipsia, 1897.

[5] C. Doelter, *Handbuch der Mineralchemie*, vol. II, pag. 16, Dresda e Lipsia, 1919. Si veda quivi anche per l'analisi di v. John, riportata più sotto, pag. 21, analisi 59.

Sopratutto l'eccesso di silice, nell'analisi di von John, dimostra che anch'egli analizzò materiale impuro ed infatti egli stesso avverte che i sopra riportati risultati furono ottenuti dopo aver dedotto il 18,96 % di $CaCO_3$. D'altronde basta esaminare l'elenco delle analisi della thomsonite nell'Hintze per rilevare la enorme variabilità dei risultati ottenuti dai diversi autori.

La thomsonite è già conosciuta ai Monzoni. Ne troviamo indicazione in Liebener e Vorhauser (1), in Zepharovich (2), in Des Cloizeaux (3) e Doelter (4), indicazioni che sono riportate anche dall'Hintze. Tutti questi autori si riferiscono però alla località Palle Rabbiose posta nel versante sud all'estremità occidentale dei Monzoni. Anche le condizioni di giacitura sono diverse da quelle della thomsonite da me studiata. Infatti Liebener e Vorhauser dànno come roccia matrice il melafiro, mentre, secondo Doelter, il nostro minerale, in quella località, si trova in piccoli aghi ed aggregati colonnari covoniformi (säulenförmige Aggregate garbenförmig gruppirt) costantemente associati alla calcite. La thomsonite da me sopra descritta differisce, dunque, da quella già conosciuta, sia per la località, nella quale venne raccolta, come per il tipo del giacimento.

**Litologia.** — *Osservazioni sopra un'alterazione argillosa negli scisti cloritico-muscovitici del Massiccio Savonese.* Nota del dott. Gustavo Cumin, presentata dal Socio Millosevich.

Durante i lavori della nuova linea ferroviaria Vado Ligure-Fornaci di S. Giuseppe s'incontrarono, nello scavo di alcune gallerie, delle difficoltà, in causa delle rocce, che pur presentando una grande resistenza alla perforazione, davano posteriormente notevoli pressioni.

In una visita effettuata nel 1919, potei osservare l'interessante fenomeno e raccogliere i campioni per lo studio di laboratorio, il cui risultato forma oggetto della presente Nota.

I terreni attraversati dalla linea ferroviaria appartengono a quel complesso di scisti cristallini, gneiss e graniti noto in geologia sotto il nome di « Massiccio Savonese », l'età e la tettonica del quale sono ancora molto discusse dai varî autori che lo studiarono (5). In complesso il massiccio si

(1) Liebener e Vorhauser, *Die Mineralien Tiro's*, ecc., pag. 276, Innsbruck, 1852.

(2) Zepharovich, *Min. Lexikon f. das Kaiserth. Oesterreich*, vol. I, pag. 118; vol. III, pag. 74.

(3) Des Cloizeaux, *Manuel de minéralogie*, pag. 376, Paris, 1862.

(4) C. Doelter, loc. cit., e Verhand, k. k. geol. Reichsanstalt, Vienna, 1875, pag. 305.

(5) Vedasi a proposito i lavori del Zaccagna, Franchi e Rovereto, chè qui non è luogo di elencare tutti.

presenta composto secondo il Franchi da masse intrusive di granito e gneiss intorno alle quali trovansi scisti micacei, cloritici ecc. intercalati qua e là da rocce serpentinose e porfiriti. L'età di questi terreni sempre secondo il citato autore sarebbe arcaica per i graniti e paleozoica per gli scisti, che apparterrebbero più precisamente al verrucano.

I fenomeni d'alterazione si riscontrano nell'àmbito degli scisti all'imbocco Santuario della galleria elicoidale detta del « Girone », tra il Santuario di Lavagnola e la valle del Lavanestro. Quivi in mezzo agli strati di scisti muscovitico-cloritici si osservano dei banchi di argilla azzurrastra ricca di granelli di quarzo. Questa argilla non può che derivare dall'alterazione degli scisti che la racchiudono, tanto più che si osserva tra essa e la roccia inalterata un graduale passaggio.

I campioni di roccia inalterata, raccolti, sono degli scisti cloritico-muscovitici di colore verdastro, la loro scistosità è ben visibile, talvolta sono finemente pieghettati. I piani di scistosità hanno una lucentezza sericea in causa all'abito sericitico della muscovite.

Al microscopio si osservano: *quarzo*, *clorite*, *muscovite*, *glaucofane*, *biotite*, *zircone*, *rutilo*, *pirite* e *limonite*.

Il *quarzo* è in plaghe composte di minuti granuli diversamente orientati, così che esse mostrano una marcata struttura a mosaico. Nelle plaghe quarzifere granoblastiche si osservano talvolta degli individui di quarzo di dimensioni notevolmente superiori a quelli che compongono la plaga dove stanno inclusi. Questi granuli possiedono un'estinzione ondulata ben visibile ed in essi si possono osservare rare inclusioni di *zircone* e di *rutilo*, nonchè inclusioni gassose.

Le plaghe quarzose sono di forma ovoidale con l'asse maggiore disposto nel senso della scistosità, intorno ad esse si serrano le plaghe lepidoblastiche muscovitico-cloritiche.

La *muscovite* incolora trovasi in aggregati ventagliformi d'aspetto sericitico ed in nessun rapporto con la scistosità, oppure in zone compatte ed allora nettamente scistose. I cristalli più grossi mostrano distintamente le singole lamelle per lo più contorte e semistaccate. Dove le contorsioni sono molto marcate, apparisce l'estinzione ondulata.

La muscovite si osserva pure in lamelle isolate, aghiformi, nell'interno delle plaghe di quarzo.

La *clorite* è diffusa tanto come la muscovite, essa è di colore verde pallido e talvolta con pleocroismo, appena percettibile:

$$n_p = n_m = \text{verde pallido}$$
$$n_g = \text{gialliccio quasi incolore.}$$

L'angolo degli assi ottici osservato in qualche lamella normale ad $a$ è abbastanza grande.

Le singole lamelle sono ben visibili ed anch'esse come quella della muscovite contorte e con estinzione ondulata.

La clorite possiede rare inclusioni di *zircone* in granuli, intorno ai quali spesso si osservano aureole pleocroiche In qualche tratto della roccia, la clorite presenta dei fenomeni d'alterazione essendo essa trasformata in una sostanza isotropa grigio-azzurrastra; ciò si osserva a preferenza nella vicinanza della pirite.

Del *glaucofane* si rinvengono pochi cristalli sparsi irregolarmente nella roccia, di solito però nelle plaghe cloritiche. Esso si presenta frantumato in prismetti rettangolari, con qualche traccia di sfaldatura, e che presentano un'estinzione rispetto all'allungamento di 4 6°. Questi prismetti che si trovano di solito in aggregati divergenti, sembrano derivare dalla frantumazione di cristalli più grandi.

Talvolta però si trova il glaucofane, che è sempre plerocroico con:

$n_p$ = giallo pallido
$n_g$ = azzurro
$n_m$ = violetto

in granuli isolati.

La *biotite* in lamelle corte e larghe, con pleocroismo

$n_p$ = giallo chiaro
$n_g = n_m$ = giallo bruno oscuro quasi nero

è rara. Essa mostra per lo più una trasformazione in clorite, onde è da supporre che almeno una parte di questo ultimo minerale sia d'origine secondaria.

La *pirite* è molto frequente nella roccia, a luce riflessa mostra il caratteristico colore giallo-ottone. Di solito essa si presenta in granuli arrotondati, non mancano però alcune sezioni delimitate da spigoli vivi. La pirite è di solito trasformata nelle sue parti esterne in limonite, ed intorno ad essa si osservano degli aloni di sostanza ferruginosa che abbonda pure in chiazze qua e là nella roccia. Questa materia ferrugginosa diffondendosi nella roccia s' insinua nei piani di scistosità che vengono così messi ancor più in evidenza.

Lo *zircone* trovasi in pochi granuli nella roccia ed a preferenza incluso nella clorite, dove intorno ad esso appaiono di frequente, come già si disse, delle aureole pleocroiche.

Più raro e sempre incluso si rinviene il *rutilo*.

Tra le varie roccie del Massiccio Savonese descritte petrograficamente la roccia esaminata si avvicina molto allo scisto cloritico-muscovitico di Quiliano (Savona) descritto dal Rosati [1], salvo che in quest'ultimo non trovasi il glaucofane e la pirite è scarsa.

[1] Rosati A., *Studio microscopico di alcune rocce della Liguria occidentale.* Rend. Acc. Linc. Roma, 1903, 1° sem., pp. 724-729.

L'analisi chimica della roccia del Santuario mi ha dato il seguente risultato:

| | |
|---|---|
| $SiO_2$ | 53,27 |
| $TiO_2$ | tracce |
| $Al_2O_3$ | 25,77 |
| FeO | 4,94 |
| MgO | 2,78 |
| CaO | 1,33 |
| $Na_2O$ | 1,67 |
| $K_2O$ | 3,47 |
| $SO_3$ | 0,50 |
| S | 1,55 |
| $H_2O$ a 110° | 0,92 |
| $H_2O + 110°$ | 4,54 |
| Totale . . . | 100,64 |

Formula magmatica secondo Osann:

S 65,1 ; A 4,7 ; C 1,8 ; F 10,3 ; T 11,6 ; K 1.2.

Valori di proiezioni: a 5,9 ; c 2,2 ; f 12,9.

L'analisi chimica e la costituzione mineralogica fanno ascrivere la roccia esaminata al gruppo dei micascisti nel senso del Grubenmann (1)

La roccia alterata raccolta poco distante dai campioni precedenti è di colore grigio-azzurro; microscopicamente si osservano in essa granuli di quarzo e lamelle muscovitiche. Il microscopio svela oltre ai due citati minerali della clorite e della limonite sparse in una massa argillosa.

Il *quarzo* si presenta raramente in aggruppamenti di più individui; esso appare di solito in granuli isolati con estinzione ondulata ed inclusioni minerali simili a quelle della roccia inalterata.

La *muscovite* con i caratteri simili a quelli già descritti trovasi in lamelle più minute che nella roccia inalterata, mentre che in lamine più grandi s'osserva la *clorite* che è scarsamente rappresentata.

Granuli e chiazze di *limonite* si trovano sparse un po' dappertutto, mentre manca la pirite ed il glaucofane.

Tutti questi minerali sono immersi in una massa fondamentale argillosa di colore azzurrastro.

(1) Grubenmann, *Die Kristallinen Schiefer*, Berlin, 1910.

La roccia esaminata chimicamente ha dato:

| | |
|---|---|
| $SiO_2$ | 60,12 |
| $TiO_2$ | tracce |
| $Al_2O_3$ | 20,57 |
| $FeO$ | 4,78 |
| $MgO$ | 1,05 |
| $CaO$ | 1,63 |
| $Na_2O$ | 1,33 |
| $K_2O$ | 3,12 |
| $SO_3$ | 0,87 |
| $S$ | 0,16 |
| $H_2O$ a 110° | 0,01 |
| $H_2O + 110°$ | 6,31 |
| Totale | 99,95 |

Le analisi chimiche e l'esame microscopico ci dànno il modo di spiegare questo fenomeno che è causato dalla trasformazione della pirite in limonite, accompagnata da formazione di acido solforico che a sua volta intacca la roccia, disgregando l'edifizio molecolare dei minerali più facilmente attaccabili, nel nostro caso la clorite e la scarsa biotite.

La pirite si altera facilmente, come ha dimostrato il Julien [1] se mista a marcasite e per produrne la trasformazione in limonite, basta secondo il Wichnell [2] l'azione dell'acqua meteorica. infiltratasi nel terreno, e dell'ossigeno che essa contiene in soluzione. Questo processo avviene secondo il citato autore in due fasi: nella prima si forma acido solforico e solfato ferroso, questo a sua volta viene trasformato in limonite con formazione di altro acido.

È questo il processo che è avvenuto nel nostro caso dove parte dei solfati sono stati dilavati dalle acque meteoriche.

Un fenomeno quasi del tutto identico a questo studiato, venne osservato dall'Evans [3] negli sciști cloritici azoici ricchi di pirite presso Mysore in India; anche quivi il prodotto d'alterazione era argilloso e di colore azzurrastro.

[1] Julien, Anal. of. New-York Acc. of. Sciences, vol. III, pp. 365-404 e vol. IV, pp. 125-224, New-York, 1890.

[2] Wichnell, Economic Geology, anno 1907, f. II, pp. 230 e seg.

[3] Evans, Min. Magaz. and Journal of the Mining Soc. London, 1910.

**Litologia.** — *Eclogite del Colle Giuliano (Valle del Pellice)* [1]. Nota di E. Grill, presentata dal Socio Millosevich.

Il Colle Giuliano, per il quale dall'alta Valle della Germanasca si passa in quella del Pellice, apresi a 2443 metri, esattamente al contatto tra la formazione dei micascisti e gneiss superiori e la formazione dei calcescisti e delle filladi. Chi vi giunge per la comoda mulattiera militare Tredici Laghi-Clapous viene ad avere, a sinistra, una elevata e scoscesa piramide di gneiss verdastri, a destra, un crinale basso ed arrotondato costituito da calcescisti, i quali rinserrano una grossa lente di serpentina scistosa, che subì, una trentina di anni fa, sul versante di Bobbio Pellice, un largo sbancamento allo scopo di erigervi un ricovero militare oggi del tutto diroccato. Sul lato sud del piazzale spiccano alcuni massi rocciosi, tondeggianti, aventi un metro circa di diametro, ben distinti dalla serpentina incassante per il colore verde più cupo, la mancanza assoluta di scistosità e la molto maggiore resistenza. Essi sono infatti così tenaci che il Genio militare che costruì il ricovero preferì aggirarli anzichè abbatterli.

Alla superficie detti inclusi lasciano scorgere individui piuttosto grossetti di un pirosseno verde, immerso in una massa di elementi più minuti di granato, clorite, magnetite, rutilo, pirite e calcopirite. Minerali tutti ben visibili ad occhio nudo o col semplice aiuto della lente. Qua e là la magnetite è in nitidi e distinti ottaedrini, facilmente attirabili, se staccati, da una debole calamita. In lamine minute, dotate di vivo splendore, è la clorite, costituente, talvolta, sottili venuzze. Numerosi occhietti, rosei, con poco più di 1 mm. di diametro, sono poi dovuti a granato; mentre plagherelle, minutamente granulari, irregolarmente distribuite, di un colore rosso cuprite, sono, come l'esame in sezione sottile ha confermato, da attribuirsi a rutilo. E non mancano punteggiature gialle di pirite o giallo bronzine di calcopirite, orlata questa ultima di malachite fibrosa, come pure altre macchie, di natura ocracea, da ascriversi alla alterazione dei minerali di ferro.

All'esame microscopico la roccia in questione risulta però costituita, essenzialmente, da pirosseno monoclino e da granato in proporzioni presso che uguali. In talune plaghe è più abbondante il granato e quindi si ha passaggio ad una vera granatite, in altre il pirosseno e potrebbe parlarsi, allora, più propriamente, di pirossenite.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del R. Istituto di Studî Superiori di Firenze.

Il *pirosseno monoclino*, il quale conserva la sua tinta verde anche in sezione sottile (quando questa sia parallela o quasi all'asse verticale) appare torbidiccio, specie verso il centro, e affetto da estinzioni ondulate. Gli individui maggiori, privi anche loro di un netto idiomorfismo, si presentano spesso geminati secondo {100} e lasciano scorgere, nei tagli trasversi, la caratteristica sfaldatura prismatica ad angolo quasi retto, interrotta da linee di divisione {100}. In lamine di sfaldatura {110} si misurano per $c:c$ valori compresi tra 39°-42°. Il pleocroismo è sensibile e si ha:

$c$ = verde-giallognolo
$a = b$ = da giallo verdolino chiarissimo a incoloro.

L'allungamento dei cristalli è positivo, l'indice medio di rifrazione, per la luce del sodio, è all'incirca 1,67.

Sottoposto all'analisi chimica il pirosseno ha dato i seguenti risultati:

| | |
|---|---|
| $SiO_2$ | 52,22 |
| $TiO_2$ | 0,49 |
| $Al_2O_3$ | 5,51 |
| $Cr_2O_3$ | tracce |
| $Fe_2O_3$ | 4,36 |
| $FeO$ | 8,40 |
| $MnO$ | 0,23 |
| $CaO$ | 11,51 |
| $MgO$ | 9,89 |
| $Na_2O$ | 5,73 |
| $K_2O$ | 0,62 |
| $H_2O-$ | 0,16 |
| $H_2O+$ | 1,43 |
| | 100,55 |

p. sp. = 2,936

L'anidride titanica è da ascriversi, certo in massima parte, a granuli di rutilo, che una cernita per quanto minuziosa ed accurata non riuscì ad eliminare del tutto.

Il pirosseno sarebbe un termine diopsidico-augitico e quindi una onfacite piuttosto povera in molecole giadeitiche. Per la percentuale relativamente bassa di $Al_2O_3$ bisogna ammettere che gli alcali siano dovuti anche in parte almeno, se non tutti, al silicato della egirina $NaFe'''(SiO_3)_2$ e quindi l'onfacite differirebbe assai da quelle delle eclogiti tipiche aventi, di solito, composizione di pirosseni giadeitici vale a dire di pirosseni fortemente alluminiferi e sodiferi nello stesso tempo.

Il *granato* risulta perfettamente isotropo e in massima parte idiomorfo si tratta quasi esclusivamente di cristalli rombododecaedrici assai netti. Solo

gli individui circondati da rutilo o da clorite, presentano un contorno irregolare e sinuoso. A differenza del granato di altre eclogiti, p. es. di quella classica di Eppenreuth nel Fichtelgebirge, che ho avuto occasione di esaminare, esso risulta povero di inclusioni solide e queste, dovute nella roccia nostra, a granuli di ematite, magnetite, rutilo o a laminuzze di anfibolo, pirosseno e clorite, non sono mai accumulate nella parte centrale del cristallo.

Coll'aiuto di liquidi pesanti ho potuto mettere insieme una quantità bastevole, sufficientemente pura, di sostanza per intraprendere l'analisi chimica che mi ha fornito i valori riportati sotto:

| | |
|---|---|
| $SiO_2$ | 38,20 |
| $TiO_2$ | 0,79 |
| $Al_2O_3$ | 16,87 |
| $Fe_2O_3$ | 5,30 |
| FeO | 5,41 |
| CaO | 32,02 |
| MgO | 0,48 |
| MnO | 0,38 |
| $H_2O-$ | 0,15 |
| $H_2O+$ | 0,22 |
| | 99,72 |

p. sp. = 3,576

Il granato ha quindi composizione di grossularia cui associansi, fra gli altri, in maggior proporzione, i silicati dell'almandino e dell'andradite e perciò differirebbe dal granato della eclogite di Saint-Philbert de Grandlieu analizzato dal Raoult (1), contenente invece una percentuale non troppo bassa del silicato del piropo.

Dopo il granato e il pirosseno viene per abbondanza un *anfibolo monoclino* verde-bluastro, derivato dalla alterazione della onfacite. Trattasi, in massima parte, pur non mancando la varietà actinolitica, di un termine glaucofanitico. I cristalli sono generalmente affusolati e presentano, di regola, due porzioni: una centrale violacea (vibrazioni luminose parallele a *c*) e una periferica, più o meno larga, verde azzurrognola, le quali non estinguono contemporaneamente. Mentre per il nucleo si ha $c:c=8°$, per la zona esterna si ha invece $c:c=20°$ circa. Nelle sezioni trasverse in cui appare nettissima la tipica figura a losanga dovuta alla sfaldatura {110} si osserva:

b = bleu-violaceo
c = bleu-cielo.

(1) Y. Brière, *Les éclogites françaises*. Bull. Soc. franc. de Min., XLIII, pag. 97, n. 4, Paris, 1920.

L'allungamento dei cristalli è sempre positivo. Si tratterebbe quindi costantemente di glaucofane, minerale assai frequente, come è ben noto, nelle eclogiti alpine. Eclogiti a glaucofane sono infatti quelle rinvenute in Valsesia da Artini e Melzi (1), a Chateyroux (Valle di Gressoney) da S. Franchi (2), da G. Piolti (3) a Mocchie nella Valle di Susa.

Ammassi, non infrequenti, granulari, simili ad uova di pesce e pignoletti isolati, giallo-rossastri, a fortissimo rilievo, elevata birifrazione e con assorbimento $e > o$ sono da attribuirsi a *rutilo*, il quale mostrasi associato, di preferenza all'elemento pirossenico che esso circonda o in cui è incluso. Anche il rutilo, come è noto, fra i costituenti accessorî, è comunissimo nelle eclogiti e in non scarsa quantità fu osservato da A. Cossa in una eclogite raccolta alle falde del versante italiano del Cervino (4).

Assai più scarsa dell'anfibolo e del rutilo è la *clorite* che costituisce sottili venuzze, visibili anche a occhio nudo, già ricordate, oppure involge, come osservasi al microscopio, taluni cristalli di granato. Anche in sezione sottile la clorite conserva il suo colore verde, ha però birifrazione bassissima e pleocroismo insensibile. Una lamella di sfaldatura basale, tra i nicols incrociati, lascia il campo quasi completamente estinto e la figura di interferenza che si osserva a luce convergente è pressochè uniassica. Ciò nonostante ritengo che il minerale in parola non sia pennina ma piuttosto clinocloro per la sua grande rassomiglianza macro e micros opica colla clorite, prevalentemente clinoclorica, della medesima regione che ebbi occasione di descrivere anni sono (5).

La *magnetite*, distribuita pure in modo irregolare, è sempre in cristalli ben netti, a sezione quadrata, rettangolare o triangolare, di 1 mm., in media, di diametro, priva di orlo leucoxenico e quindi non titanifera.

L'*epidoto* è in granuli grossetti o individui allungati parallelamente ad $[y]$ sovente geminato polisinteticamente secondo $\{100\}$ e percorso da linee di sfaldatura perpendicolari o quasi all'allungamento che è positivo. Il pleocroismo va dal giallo olio all'incoloro. La rifrazione e la birifrazione sono assai forti.

Più scarsi dell'epidoto sono la *pirite* e la *calcopirite* e del tutto accessorî l'*ematite* e il *quarzo*. Il quarzo è rarissimo e in talune sezioni anche

(1) E. Artini e G. Melzi, *Ricerche petrografiche e geologiche nella Valsesia*, pag. 330, Milano. 1900.

(2) F. Zambonini, *Sul glaucofane di Chateyroux (Valle di Gressoney)*. Rend. R. Acc. d. Lincei, XI, serie 5ª, fasc. 5º, Roma, 1902.

(3) G. Piolti, *Pirosseniti, glaucofanite, eclogiti ed anfiboliti* ecc. Atti R. Acc. delle Sc., vol. XXXVII, Torino, 1902.

(4) A. Cossa, *Ricerche chimiche e microscopiche*, pag. 178, Torino, 1881.

(5) E. Grill, *Contributo allo studio dei minerali della Valle del Chisone (Alpi Cozie)*. Atti Soc. Tosc. Sc. Nat., Mem., vol. XXXI, Pisa, 1916.

mancante del tutto. È affetto da estinzioni ondulate e assai limpido, includendo solo radi straccetti di clorite o aciculi di anfibolo ai quali minerali mostrasi sempre associato.

La composizione chimica della eclogite del Colle Giuliano è la seguente (I). Accanto, in II, riporto l'analisi di una eclogite francese (Le Cellier) (1) — le nostre non sono mai state, da quanto mi consta, analizzate — che avvicinasi, in modo notevole, a quella qui studiata:

| | I | II |
|---|---|---|
| $SiO_2$ | 43,95 | 43,60 |
| $TiO_2$ | 3,42 | 5,16 |
| $Al_2O_3$ | 7,95 | 8.00 |
| $Cr_2O_3$ | tracce | — |
| $Fe_2O_3$ | 8,47 | 8,11 |
| FeO | 13,17 | 13,64 |
| MnO | 0,27 | — |
| CaO | 8,93 | 10,00 |
| MgO | 6,55 | 4,32 |
| $Na_2O$ | 4,62 | 5,07 |
| $K_2O$ | 0,51 | 0,57 |
| $P_2O_5$ | — | 1,09 |
| Cu | tracce | — |
| S | tracce | — |
| $H_2O$ — | 0,30 | 0,01 |
| $H_2O$ + | 1,87 | 0,67 |
| | 100,01 | 100,24 |
| | p. sp.=3,50 | p. sp.=3,42 |

Nei quadri che seguono sono riferite le formule secondo Loewinson-Lessing, secondo Osann e secondo F. Becke. In I i risultati analitici sono riportati a 100, dopo esclusione di $H_2O$, $P_2O_5$, riduzione di $TiO_2$ a $SiO_2$ e sottrazione della quantità di CaO corrispondente al $P_2O_5$ trovato. In II si hanno i rapporti molecolari dei singoli componenti. In III le percentuali di tali rapporti non calcolando però $Fe_2O_3$ a FeO, come di solito si usa fare, perchè abbiamo nelle due rocce un difetto di $Al_2O_3$ per saturare $Na_2O + K_2O$ e poi perchè esistono in esse pirosseni ferrico-alcalini.

(1) Y. Brière, loc. cit.

| | Eclogite (Colle Giuliano) A | | | Eclogite (Le Cellier) B | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | I | II | III |
| $SiO_2$ . . . | 47,96 | 79,54 | 51,74 | 49,50 | 82,09 | 54,04 |
| $Al_2O_3$ . . . | 8,20 | 8,02 | 5,22 | 8 34 | 8,17 | 5,37 |
| $Fe_2O_3$ . . . | 8,73 | 5,47 | 3,56 | 8,46 | 5,29 | 3,49 |
| FeO. . . . | 13,58 | 18,90 | 12,30 | 14,22 | 19,79 | 13,03 |
| MnO . . . | 0,28 | 0,39 | 0,25 | — | — | — |
| CaO . . . | 9,21 | 16,42 | 10,68 | 9,10 | 16,23 | 10,69 |
| MgO . . . | 6,75 | 16,75 | 10,90 | 4,50 | 11,17 | 7,35 |
| $Na_2O$ . . . | 4,76 | 7.68 | 4,99 | 5,29 | 8,52 | 5,61 |
| $K_2O$ . . . | 0,53 | 0,56 | 0,36 | 0,59 | 0,63 | 0,42 |
| | 100,00 | 153,73 | 100,00 | 100,00 | 151,89 | 100,00 |

*Formule secondo Loewinson-Lessing.*

| | $\alpha$ | $\beta$ | $RO : R_2O_3 : SiO_2$ | $R_2O : RO$ | $K_2O : Na_2O$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1,57 | 93,27 | 4,49 : 1 : 5,89 | 1 : 6,36 | 1 : 13,71 |
| B | 1,69 | 86,37 | 4,18 : 1 : 6,09 | 1 : 5,16 | 1 : 13,52 |

*Formule secondo A. Osann.*

| | S | A | C | F | *a* | *c* | *f* | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 51,74 | 5,35 | 3,43 | 30,70 | 2,7 | 1,7 | 15,6 | 9,32 |
| B | 54,04 | 6,03 | 2,73 | 28,14 | 3,2 | 1,5 | 15,3 | 9,30 |

*Formule secondo F Becke.*

| | Si | L | U |
|---|---|---|---|
| A | 7,7 | 3,6 | 8,7 |
| B | 8,0 | 3,7 | 8,3 |

Queste ultime formule si deducono, come è noto, dai risultati analitici trascurando $H_2O$, $P_2O_5$ ecc. e l'ossigeno legato ai metalli e al silicio, e calcolando poi questo e quelli in percenti di cui si fanno tre gruppi: Si=silicio; L=Ca + Na + K (basi solubili); U=Al + Fe + Mg (basi insolubili).

Il confronto delle varie formule fa vedere la stretta analogia delle due rocce e la loro pertinenza ad un magma gabbrico

A comune fra loro le due rocce avrebbero ancora la mancanza di distene e zoisite che, come costituenti accessorî delle eclogiti, sono molto frequenti. Ma non sarebbero invece concordanti nella giacitura loro. L'eclogite di Le Cellier, trovata erratica, sembra provenire da gneiss granulitici; quella del Colle Giuliano è inclusa, invece, come abbiamo visto, entro scisti serpentinosi e in ciò essa differirebbe pure dalle eclogiti alpine italiane che, come è noto, compariscono nelle anfiboliti e nei micascisti granatiferi.

All'isola d'Elba, e più precisamente all'Affaccata, si avrebbe però una roccia eclogitica entro alla peridotite serpentinosa. La roccia, descritta da P. Aloisi [1], presenterebbe, per altro, una composizione mineralogica che diverge notevolmente da quella della eclogite del Colle Giuliano.

**Biologia.** — *Nuove osservazioni su luminescenza e simbiosi: I. La fosforescenza degli Oligochet*. Nota di U. Pierantoni, presentata dal Socio B. Grassi.

Nel gruppo degli oligocheti sono comprese numerose specie dotate della facoltà di brillare di viva luce. Di queste si trovano varie notizie nella letteratura, per quanto la maniera di rilucere di questi animali sia poco studiata e nulla sia noto riguardo alla sorgente della luce medesima.

Mettendo da parte le specie in cui si è parlato di una luminosità del tutto occasionale, quale l'*Allolobophora foetida*, di cui ebbe ad occuparsi il Vejodowsky (1884), ve ne sono altre il cui potere luminoso è del tutto normale e costante e la luce distribuita in maniera ben definita alla superficie del corpo. È su queste che bisogna perciò fermare l'attenzione, essendo possibile che sia vero quanto osserva il Dhhlgren, che almeno in alcuni casi la luminosità degli oligocheti possa esser dovuta alla presenza di funghi luminosi nel contenuto intestinale.

Tale però non è di certo il caso del *Microscolex phosphoreus*, un piccolo oligochete terricolo comune nell'Argentina ma oramai divenuto frequente anche in Europa, specialmente negli orti botanici, dove è da credere che sia stato importato insieme col terriccio di piante d'America.

[1] P. Aloisi, *Il Monte Capanne, ricerche litologiche*, pag. 81, Pisa, 1920.

Questa specie, per la sua costante luminosità, è anche una delle più studiate: se ne sono occupati il Dugès nel 1837, il Giard (1887), il Moniez (1889), il Barrois (1891) il Beddard (1899), il Benham (1899), il Michaelsen (1899), oltre al Rosa, che ebbe ad illustrarla dal punto di vista sistematico (1887-88).

Recentemente il Walter (1909) si occupò della maniera di rilucere di questo anellide, combattendo l'opinione del Giard che la sorgente luminosa dovesse ricercarsi in quattro paia di glandole speciali poste intorno all'intestino ed aprentisi nella parte dorsale dell'animale, come pure combattè l'asserzione di Benham, che la luce dipenda da un muco luminoso che vien fuori dai pori posteriori, dato che in questa specie mancano tali pori. Il Walter però non ha risolto la questione e ritiene solo verosimile che la luce dipenda da glandole a secrezione mucosa fosforescente, esistenti verso l'estremo posteriore ed anteriore nella pelle dell'animale.

Tutto è quindi rimasto incerto riguardo alle cause della luminosità del *Microscolex phosphoreus*, mentre resta assodato il solo fatto, da varî autori constatato, che in questo animale rilucono a preferenza l'estremo anteriore ed il posteriore e che la luce che risponde agli stimoli appare spesso, come dice anche il Walter, per punti luminosi molto ravvicinati che si notano sulla pelle, nelle dette regioni.

Tale osservazione perfettamente esatta, trova la sua spiegazione nella vera causa della luminosità di questo oligochete, che è dovuta alla presenza nelle cellule di alcuni tessuti del corpo, di miriadi di batterî che con essi vivono in simbiosi.

La presenza di batterî entro cellule di varî tessuti degli oligocheti non è un fatto nuovo. Fin dal 1898 il Cuénot ne segnalò la presenza nel tessuto connettivo intermuscolare di *Eisenia rosea*, designandoli come veri batterî. Lo Schneider nella sua *Istologia comparata* (pag. 412) li chiama batteroidi, ma segnala il fatto che di fronte ai metodi di colorazione si comportano come veri batterî. Più recentemente queste forme nei tessuti degli oligocheti sono state osservate da Thapar (1918) e da Cognetti in *Pheretima*.

Io ebbi occasione, per cortesia di quest'ultimo autore, di osservare alcuni preparati di sezioni di *Pheretima* assai ben riusciti e colorati con ematossilina ferrica ed eosina, e dall'aspetto dei corpuscoli bastonciniformi che a miriadi si rinvenivano in quasi tutti i tessuti del corpo, salvo che nell'epidermide, acquistai la convinzione che si trattasse di veri batterî. Non potei però avere delle *Pheretima* viventi, nè trovai nella letteratura notizie sulla fosforescenza di questi oligocheti, che peraltro non è per questo da escludere, dato che per molte forme, specialmente esotiche, studiate di solito su collezioni conservate o su raccolte fatte di giorno, l'eventuale fosforescenza è completatamente sfuggita.

In ogni modo, per istudiare il fenomeno su di un animale del quale si posseggono dati precisi sulla luminescenza, mi son procurato un discreto materiale di *Microscolex phosphoreus*, ed ecco i primi risultati ottenuti da un esame del materiale suddetto.

Da uno studio delle diverse parti del corpo dell'animale, fatto con le sezioni e con speciali colorazioni risulta che in questa specie le forme batteroidi sono abbondantissime, tanto da esserne addirittura infarcita la parete del corpo in alcune sezioni. Esse mancano nelle cellule della pelle (epidermide), mentre si rinvengono a miriadi nel connettivo posto fra i muscoli tanto dello strato dei muscoli longitudinali che in quello dei muscoli trasversali: essi sono disposti ad assise fra gli strati muscolari nella sostanza fondamentale e raccolti a gruppi negli spazi di questa. Mancano anche nella parete e nel contenuto dell'intestino.

La forma, la struttura interna, il modo di reagire con le sostanze coloranti e tutte le fasi di moltiplicazione per divisione, nonchè la struttura interna, che con forti ingrandimenti e con buone colorazioni è possibile di rilevare, mettono fuori di dubbio la loro qualità di veri batterî simbiotici.

La distribuzione nelle regioni del corpo dell'animale si accorda esattamente col modo speciale di distribuirsi della luminosità nelle diverse regioni.

I batterî, infatti, sono abbondantissimi nella regione dei primi 10-12 segmenti, mancano o sono scarsi nella regione clitelliana e postclitelliana, sono daccapo numerosissimi, sebbene meno che anteriormente, nella regione posteriore e codale del corpo. In questa specie, come s'è visto, sono appunto i due estremi che rilucono a preferenza, contrariamente a quanto afferma il Panceri (1875) il quale riferisce la veduta di Moquin Tandon, che negli oligocheti è la regione clitelliana che è dotata di luminosità

A differenza di quanto si riscontra pei batterî simbiotici di *Pheretima*, che sono presenti anche in quasi tutti gli organi interni del corpo, qui essi non si rinvengono di solito in tutti questi organi e solo pochi se ne trovano nelle cavità del corpo. Uno straterello sottile, ma abbastanza uniforme di questi batterî riveste il sistema nervoso. Un esame degli ovarî, che mi son dato premura di fare sulle sezioni, mi ha permesso di osservare inoltre la loro presenza in piccoli gruppi nelle uova ovariche che sono già in avanzato accrescimento e che sono ancora attaccate agli ovarî. Tale presenza spiega coll'eredità dei germi, la costanza del fenomeno luminoso in tutti gli individui e permette di considerare la fosforescenza di questi (e forse di tutti gli oligocheti) come un nuovo esempio di simbiosi fisiologica ereditaria.

Riservandomi di compiere più accurate ed esaurienti ricerche nella prossima primavera, in cui mi sarà certo possibile di avere un più ricco materiale, ho creduto utile di dare notizia intanto del risultato di queste osser-

vazioni, nelle quali il fenomeno della luminescenza batterica trova una nuova conferma ed una nuova e più ampia applicazione (1).

## MEMORIE
## DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Il Socio Artini presenta, perchè sia sottoposta al giudizio di una Commissione, una Memoria del prof. Repossi avente per titolo: *Azzurrite e Malachite della miniera di Campo Pisano (Iglesias).*

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Segretario Castelnuovo legge una relazione dei Socî Angeli, relatore, e Peratoner, sulla Memoria del prof. Oddo: *Il Magnesilpirrolo ed il suo impiego per le sintesi di composti pirrolici.*

(1) Delle obiezioni contenute nella Nota di S. Mortara riguardanti la luminescenza batterica dei sepiolidi, le ulteriori osservazioni compiute dall'autrice medesima sugli animali stessi da me studiati hanno già fatto giustizia, confermando la mia tesi (questo periodico, vol. XXXI, ser. 5ª, 2° sem., pag. 54). Tuttavia ritengo opportuno di aggiungere un'ultima parola per eliminare equivoci in cui in seguito alla pubblicazione della Mortara sono caduti altri autori. La detta autrice aveva affermato nella sua prima Nota:

1°) che negli organi luminosi di *Heteroteuthis* non vi sono batterî;

2°) che da una quantità di caratteri si poteva affermare che il batterio luminoso che si sviluppa su *Heteroteuthis post mortem* si avvicina molto a quelli ottenuti da me dagli organi luminosi di *Sepiola*.

Queste due affermazioni potevano far credere che io avessi scambiato per batterî della fosforescenza i banali batterî che si sviluppano *post mortem* su tutti i cefalopodi, e che perciò la luminescenza batterica da me scoperta negli organi fotogeni di *Sepiola* e *Rondeletia* fosse una pura fantasia.

Quando però, più tardi, l'A si è decisa ad esaminare gli animali stessi da me studiati, ha trovato i batterî fotogeni ed ha potuto rilevare che nulla hanno di comune con quelli che si sviluppano sugli animali morti.

Senonchè la detta autrice insiste dicendo che io ho generalizzato e che secondo lei, pur essendovi questi casi di luminescenza batterica degli animali, non si deve generalizzare. Questa seconda parte della discussione è del tutto teorica. Io ritengo, l'ho affermato e lo affermo ancora, che anche in quei casi in cui veri batterî non si trovano, ma si trova la nota sostanza granulare fotogena, questa abbia origine da colonie batteriche trasformatesi per adattamento alla vita endocellulare; e fondo la mia convinzione sulle caratteristiche dei granuli, riguardanti il modo di rilucere e di riprodursi, del tutto identico a quello dei batterî, nonchè su dati di sviluppo degli organi fotogeni, della loro morfologia, nonchè sui fenomeni di eteromorfosi dei batterî fotogeni allevati in ispeciali masse di coltura.

In questa tesi ho già il conforto dell'opinione di molti moderni scienziati e ricercatori che ebbero a confermare specialmente all'estero le mie ricerche. I nuovi risultati positivi registrati nel presente lavoro mi confortano sempre più ad insistere nella mia opinione.

La relazione conclude col proporre l'inserzione del lavoro negli Atti accademici, purchè l'autore ne riduca la mole; e le conclusioni della relazione, messe ai voti dal PRESIDENTE, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

## PERSONALE ACCADEMICO

All'inizio della seduta il Presidente VOLTERRA dà il triste annuncio delle perdite subìte dall'Accademia nelle persone dei Soci stranieri Sir JAMES DEWAR e G. VAN DER WAALS.

Il PRESIDENTE commemora brevemente gli estinti, rilevando quanto la morte di entrambi sia un grave lutto per la scienza. Di Sir James Dewar, che appartenne sempre alla Royal Institution, ricorda la mirabile attività sperimentale, e le numerose ed importanti scoperte, come quella della cordite e la costruzione dei recipienti che ebbero una larga applicazione pratica nei « termos ». Il compianto Socio si occupò molto di questioni di spettroscopia, e dell'azione fisiologica della luce. Creò, si può dire, la fisica del freddo, e solidificò per il primo l'idrogeno. Aveva un carattere simpatico, vulcanico, da buon scozzese; e la sua casa era un centro d'arte e di finissima conversazione.

Quanto al Van der Waals si può dire che àvvi un punto di contatto tra lui e il Dewar, fra gl'importanti lavori del primo grande scienziato nel campo matematico e quelli del secondo nel campo fisico. Il PRESIDENTE cita gli studî del Van der Waals sulla continuità fra lo stato liquido e lo stato gassoso, e le sue numerose pubblicazioni diffuse in tutto il mondo e che portarono alta la sua fama.

In memoria del Socio Nazionale TORQUATO TARAMELLI: commemorazione del Socio C. F. PARONA.

Ringrazio il Presidente dell'invito a rendere omaggio alla memoria del nostro illustre e compianto Collega TORQUATO TARAMELLI ed a ricordarne i meriti verso la scienza e verso la patria: gli sono grato anche perchè mi è rinnovato conforto il dire del venerato maestro e dell'amico carissimo. Amicizia presto concessa, con fiducia fraterna, dal docente all'allievo, e ricambiata da me con vivo senso di riconoscenza per i benefici ricevuti, e di riverenza inspirata dall'altezza morale di Lui, dal suo sapere e dalle sue opere.

Fu un maestro buono nel significato più nobile della parola; modesto nell'aspetto e nelle abitudini, entusiasta della scienza che professava e di essa profondo conoscitore ed appassionato divulgatore. Egli comunicava agli scolari il suo fervore per la geologia: e come fece del nostro paese il campo preferito dei suoi studî, così della Patria fece l'oggetto della sua alta e pura pas-

sione. Quanto insigne fu il geologo, altrettanto benemerito fu il cittadino: meriti e virtù che valsero a dare particolare risalto al suo insegnamento, durato ben 53 anni, dal 1867 al 1920; prima per otto anni nell'Istituto Tecnico di Udine e poi nell'Università di Pavia.

Torquato Taramelli ebbe i natali in Bergamo il 15 ottobre del 1846 e morì in Pavia il 31 marzo 1922. Di famiglia bergamasca, Egli conservò grande affetto alla sua città, la quale si onorò di Lui, dimostrandolo in ripetute occasioni e dedicando al suo nome una delle sale del Museo Civico. Si laureò a Palermo, ma gli studî liceali ed universitarî Egli fece a Pavia. Fu assistente dello Stoppani presso la Scuola degli Ingegneri di Milano, ed accompagnando il geniale rinnovatore della geologia lombarda attraverso quel classico museo geologico, che è la Prealpe lombarda, apprese come si procede nelle applicazioni della scienza teorica allo studio diretto del terreno; e l'indirizzo del maestro, eccitatore di energie, e le spiccate attitudini del giovane discepolo alla geologia pratica, fecero presto del Taramelli un'esperto geologo rilevatore. Così dal fascino, che la pittoresca, suggestiva eloquenza dello Stoppani esercitò sull'animo suo sensibile e sulla mente aperta al bello ed al vero, il Taramelli fu indotto all'amore delle montagne, a narrarne la storia, a spiegarne le forme, a dedicare l'opera sua all'alpinismo scientifico. Egli infatti descrisse i monti da naturalista e da paesista, possedendo, per innato gusto artistico, il sentimento della montagna, scientificamente affinato e guidato da profonde conoscenze geologiche.

La campagna di guerra del 1866 separò il professore dall'assistente, chiamati a servire altrimenti la Patria. Il Taramelli fu volontario con Garibaldi nel Trentino, dove fece onore alla tradizionale bella fama dei garibaldini bergamaschi e pavesi. Dalla guerra ritornò temprato alla vita dura della montagna ed agguerrito contro le avversità dell'esistenza, che sempre affrontò con sereno spirito di sacrificio e con elevato sentimento del dovere. Del Trentino conservò vivo ricordo nostalgico, che lo spinse a ritornare ripetutamente, come geologo, fra quei monti così attraenti per insuperate bellezze naturali e che offrono il più alto interesse scientifico per i problemi geologici già risolti e che vi restano da risolvere. I Trentini conobbero ed amarono il geologo ed alpinista irredentista, e nel 1904 inaugurarono in suo onore il « Rifugio Taramelli » sui Monzoni della Valle di Fassa.

Terminata la guerra, e nominato professore di Storia naturale nell'Istituto Tecnico di Udine, vi giunse in tempo per rinvigorire ancor meglio il suo spirito ed i suoi propositi con gli incoraggiamenti di Quintino Sella, allora Commissario del Re nel Friuli. Il collega suo anziano G. A. Pirona, geologo e paleontologo di fama, lo iniziò alla conoscenza pratica della geologia friulana. Conobbe allora Giovanni Marinelli, e fra i due giovani studiosi si strinse presto intima amicizia. Commemorando nel 1901 l'amico perduto e ricordando l'inizio dei fraterni rapporti coll'insigne geografo, il

Taramelli disse: « ci scambiammo i nostri ideali ed i nostri propositi, entrambi desiderosi di lasciare traccia di noi, incominciando collo studio di questa regione friulana ». Ed ai propositi essi tennero fede con grande onore.

Nel Friuli ebbe dunque principio quell'attività scientifica, feconda di brillanti risultati, che solo la morte doveva troncare, e che dal Friuli Egli estese a tante parti della Penisola, perfezionando le conoscenze geologiche del nostro paese, ed arricchendo la scienza di studî, che resteranno a prova della versatilità ed originalità della sua mente. Di vaste regioni Egli fece studî così particolareggiati da poterne lasciare a documentazione le carte geologiche e le relative descrizioni, quali sono quelle delle provincie di Udine e di Belluno, dell'Istria e della Lombardia, dell'Appennino pavese, e la monografia per le provincie Venete, che nel 1880 la nostra Accademia onorò col Premio Reale. E questi lavori, che passano in rassegna quasi tutta la serie dei terreni componenti il suolo del nostro paese, dai più antichi, paleozoici, ai più recenti, alluvionali, segnano spesso scoperte d'ordine stratigrafico e paleontologico e nuove interpretazioni tettoniche. In particolare alla serie paleozoica delle Carniche Egli portò coi suoi primi studî importanti contributi, illustrandola nel riguardo stratigrafico e paleontologico e con vedute sue di sintesi tettonica: così notevoli queste sue ricerche da richiamare tosto sul giovane geologo l'attenzione dei dotti e da renderlo degno della cattedra universitaria. Acume privilegiato di stratigrafo e colpo d'occhio sicuro. Egli dimostrò spesso nelle sue ricerche e in particolare nello studio del complesso problema geologico del Sempione, in occasione dei rilievi preliminari alla progettata grande galleria, come i risultati della perforazione posero in evidenza.

Fra i numerosissimi lavori [1], frutto delle sue ricerche nelle Alpi e nell'Appennino, sono da segnalare inoltre: la monografia stratigrafica e paleontologica sul Lias veneto, lo studio (colle note successive) sul Lago di Garda in rapporto alla struttura del Trentino e all'intervento del fenomeno glaciale nel modellamento del bacino lacustre, il volumetto sui tre laghi lombardi e quella sulla provincia di Pavia (2ª edizione), due saggi di singolare pregio come descrizioni regionali, ed anche la Memoria sulla formazione serpentinosa dell'Appennino pavese. La sola citazione di questi scritti su argomenti svariati dimostra quanto sia vasta l'opera sua di geologo e come sia giustamente fondata la sua fama. Certo è che sulla geologia delle Alpi nostre, dall'Istria al bacino del Ticino, il Taramelli ha lasciato traccia profonda della sua personalità scientifica; e senza dubbio Egli ha legato particolarmente il suo nome ad un lungo periodo della geologia veneta. Infatti

[1] C. F. Parona-Torquato Taramelli, Cenni commemorativi, con *Elenco delle pubblicazioni*, Boll. R. Com. Geolog. d'It., vol. XLVIII, 1922. L'elenco comprende 348 numeri. Fra quelli del 1899 manca: *Rocce e minerali della Somalia*, in: L. Robecchi-Brichetti, *Somalia e Benadir*. Milano, pag. 488.

a Lui fu attribuito specialmente il merito (G. Dal Piaz, 1912) d'essere stato fra i primi geologi ai quali devesi il primo e fondamentale quadro d'insieme della tettonica veneta: allora, per lungo tempo quasi solo nella gara coi geologi austriaci e tedeschi, ammoniva con brillanti allarmi i nostri giovani a non lasciare campo aperto agli stranieri, e li esortava a studiare il territorio italiano entro i confini naturali, non già per principio di esclusivismo, in contrasto colla libera azione della scienza, che è per essa condizione di progresso, ma a salvaguardia della tradizione gloriosa della geologia italiana e per decoro nazionale.

Altre indagini, colle quali il nostro geologo ha dato prova di originalità non meno singolare, sono quelle sul Quaternario continentale nella Penisola, o, più precisamente, sugli avvenimenti caratteristici del Glaciale e del Postglaciale. Le numerose Note e Memorie, che vi si riferiscono, contengono gli elementi per la completa e sistematica trattazione della storia di questo periodo geologico. Pose le prime basi collo studio razionale delle alluvioni subalpine, per ripartirle nello spazio e nel tempo, ricercandone anche i rapporti coi depositi morenici: e fu dei primi a concepire l'idea di ripetute glaciazioni. Segnalando il *ferretto* e la *terra rossa*, e valutando queste formazioni nel loro significato climatico e cronologico, sostenne il concetto che esse, quali prodotti di eccezionale intensità dell'azione meteorica, dànno indizi di una atmosfera più ricca di anidride carbonica. A spiegare il fenomeno del terrazzamento operato dai fiumi in pianura, contribuì con acute osservazioni e nuove idee, mettendo specialmente in rilievo l'efficacia del fatto della cernita, che le correnti esercitano sulle loro alluvioni. Anche il terrazzamento orografico richiamò la sua attenzione, come fattore importante e documento della storia delle valli, prima, durante e dopo l'invasione glaciale. Nè meno fondate sono le argomentazioni sull'entità delle glaciazioni e sulla misura e impronta del modellamento glaciale rispetto alla evoluzione e dalla morfologia delle valli, al problema dell'origine dei laghi prealpini e sul costituirsi delle conoidi alluvionali e dei delta lacustri.

Sono scritti che riassumono ricerche riferentisi al tempo durante il quale i fenomeni geodinamici foggiarono l'Italia a penisola, ed impressero forme, fisionomie e bellezze alle diverse regioni. Colla vasta esplorazione nei tempi e nei fenomeni neozoici, il geologo stese la mano da un lato al geografo, in quanto la geo-morfologia è tanta parte della geografia fisica, e dall'altra al paleoetnologo nei tentativi per addivenire all'accordo tra la cronologia geologica e quella umana preistorica, tra i fattori caratteristici che hanno determinato l'evoluzione geologica e climatica quaternaria e il diffondersi delle razze umane e il succedersi delle primitive civiltà. Che bell'opera avrebbe arricchita la nostra letteratura geologica, se al Taramelli non fossero mancati tempo e lena per rielaborare e vagliare gli elementi di questi studî e raccoglierli in un complesso coordinato e sintetico!

Ma altri lavori suoi sono da tener presenti se ci vogliamo fare un concetto adeguato della varietà dei contributi da Lui portati alla Scienza della Terra. Di sua iniziativa, o per invito suggerito dalla competenza che gli era riconosciuta, si occupò di frequente in questioni di geologia applicata: per tracciati ferroviarî, acquedotti, sbarramenti, frane, ricerche di geologia agraria e così via. Ed anche in questo campo l'opera sua fu assai notevole, ponendo essa in luce quante siano le applicazioni che la nostra scienza può avere, spesso decisive, per la risoluzione di questioni di alto interesse pubblico o privato. Notisi poi che dalle applicazioni pratiche della geologia fu talvolta indotto a trattazioni teoriche e strettamente scientifiche. Al riguardo ricordo quella relativa alle sorgenti, che offrirono al Taramelli speciali attrattive ed occasioni per esporre vedute nuove sul comportamento delle acque sotterranee e sulle cause determinanti il loro scaturire all'esterno. Similmente non possiamo scindere gli studî suoi sulle frane, diretti a ricercarne le cause, a verificarne gli effetti ed a suggerire i mezzi per renderle meno frequenti e meno funeste, dalle ricerche puramente scientifiche sulle traccie degli scoscendimenti post-glaciali nelle valli alpine conseguenti al regresso dei ghiacciai. Le quali ricerche nei loro risultati confermano com'Egli vedesse ugualmente bene e lucidamente nel passato geologico e nella geologia in azione.

Con mente e competenza di geologo si occupò pure di terremoti, e fu sismologo autorevole fin dalla pubblicazione del suo primo lavoro in argomento; quello sul terremoto del Bellunese (1873), al quale seguirono le indagini sui terremoti della Liguria, dell'Andalusia, su quelli calabro-siculi e dell'Appennino Centrale, anche collo scopo, specialmente riguardo a questi ultimi, di ricercarne la dipendenza dai fatti di assestamento tettonico e dal vulcanismo. E sul vulcanismo fermò ripetutamente la sua attenzione, e ricordò pure agli studiosi, opportunamente nel contrasto delle moderne idee sulle cause delle conflagrazioni vulcaniche, i meriti dello Spallanzani come vulcanologo.

Il Taramelli favorì inoltre il progresso della geologia colla sua scuola, reclutando numerosi allievi fra gli studenti universitari e fra gli autodidatti. Le sue lezioni interessavano per il loro contenuto originale e per la passione che animava il suo dire: con senso di artista, richiamando alla mente degli scolari le bellezze naturali del nostro paese, insegnava con parole colorite a cercarne le cause e insinuava l'amore alla storia di nostra terra e a darsi ragione dei mutevoli caratteri del paesaggio da luogo a luogo. Con le lezioni, conferenze, gite scolastiche fu efficace propagandista della coltura geologica: nel tempo stesso fu attivo sostenitore delle necessità, per ragioni scientifiche e utilitarie, del rilevamento della carta geologica d'Italia, e della sua pubblicazione, come funzione di Stato: opera grandiosa, che tarda nella sua attuazione perchè pochi sono gli operatori, per quanto esperti, e

troppo scarsi sono i mezzi ad essa assegnati e frequenti gli incagli che ritardano i lavori.

Come scienziato e docente non fu seguace di una scuola preferita e fu rispettoso di tutte; segnalava ed ammirava il vero qualunque ne fosse la fonte, rilevando acutamente ma indulgentemente ciò ch'Egli riteneva errore. Rievocatore dei meriti degli italiani nella conquista dei fondamenti della geologia positiva e nel dare ad essa caratteri e sostanza di vera scienza, seguiva con cauto interesse il succedersi di nuovi indirizzi e di nuove ipotesi, non ripudiando queste anche se troppo contrastanti coi criteri dapprima dominanti, lasciando al tempo ed alla critica scientifica di verificarne il contenuto di verità. Così egli si comportò a proposito dell'idea, catastrofica nelle cause e negli effetti di fronte alla dottrina dell'attualismo, dei carreggiamenti e dei ricoprimenti, applicata alla interpretazione dell'origine e struttura delle catene dei monti a pieghe.

La geologia per l'amato Maestro fu infine mezzo di propaganda patriottica, non solo perchè diretta a far conoscere meglio l'Italia agli italiani, ma anche perchè, nel lungo periodo della grande guerra, l'antico garibaldino, l'alpinista e geologo irredentista dedicò, con commovente passione ed entusiasmo giovanile, tutta la sua attività intellettuale, con conferenze e pubblicazioni e partecipando ai comitati d'azione, a dimostrare l'italianità delle terre da redimere e la necessità della conquista dei confini naturali, ad esaltare la virtù del sacrificio e la gloria dei caduti, a tenere alto il morale coll'esempio della sua fede verso gli ideali e della sua fiducia nella vittoria e nei destini della Patria.

I colleghi, ai quali ho l'onore di rivolgermi, ricordano la sua figura simpatica, dalla quale traspariva la modestia del suo costume ed il carattere semplice e mite, così come il suo dire e i suoi scritti rivelavano la mente aperta e sagace, le idee lucide, il temperamento riflessivo per indole e per influsso delle meditazioni, alle quali si era abituato durante le lunghe peregrinazioni solitarie, silenziose nei monti d'ogni parte d'Italia; quando, com'Egli diceva, sentiva stimolata la sua naturale indolenza contemplativa di artista mancato Le ferme sue convinzioni, il desiderio del bene per gli altri più che per sè, le sue virtù e le preclare benemerenze di Maestro e di cittadino lo rendevano universalmente caro.

Molti furono i dolori e gli sconforti che turbarono la sua vita e pochi i conforti che l'allietarono. Fra questi commosse l'animo suo sensibile di padre quello venutogli dalla nostra Accademia, coll'assegnazione del Premio Reale per l'Archeologia al figlio Antonio. Al degno figlio, nostro caro collega Linceo, ed a tutta la famiglia Taramelli, io rinnovo, con fiducia nel vostro consenso, le più vive condoglianze, che vanno anche all'Università di Pavia, della quale il compianto collega fu decoro come insegnante e scienziato e due volte Rettore. Egli lascia esempio e gradito ricordo di una

vita intemerata, laboriosa ed utile, e un nome saldamente affidato a complessa opera scientifica, contraddistinta da originalità di pensiero, che la geologia italiana ricorderà spesso e a lungo fra gli elementi fattivi del suo progresso.

---

Il Socio Cerulli legge la seguente Commemorazione del Socio straniero E. G. Van de Sande Bakhuyzen.

Del Consocio straniero Endrico Gerardo Van de Sande Bakhuyzen vi fu annunziato il decesso e degnamente commemorata l'opera dal nostro Presidente nella seduta dello scorso febbraio. Fu un dire breve e succoso, poichè nessuno dei principali meriti dell'estinto rimase nell'ombra. Tuttavia il Presidente, conoscendomi estimatore di vecchia data del Bakhuyzen, vuole che prenda anch'io la parola in argomento, del che gli so grado, premendomi che gli astronomi di Olanda sappiano ancora una volta quanto il sapere e la forma d'attività del Bakhuyzen fossero apprezzati fra noi.

Bakhuyzen fu uno dei più insigni rappresentanti dell'astronomia pratica di stile antico. Quando egli studiò, attorno alla metà del secolo scorso, l'astronomia non era concepita altrimenti che come scienza dei movimenti degli astri, una pura applicazione, dunque, o se vuolsi, un ramo della meccanica. L'astronomo teorico calcolava i movimenti, l'astronomo pratico li verificava con metodi sempre più raffinati di osservazione. Si sviluppava, cioè, nell'astronomo osservatore il gusto della precisione, che nei più dotati, come ad es. un Bessel, assurse a vero genio. È noto che Bessel trovò ed insegnò il modo di far buone osservazioni anche con cattivi istrumenti, e portò all'ultima perfezione quell'arte senza regole fisse che si chiama « l'eliminazione dell'istrumento ». Bakhuyzen non ebbe rapporti diretti con Bessel, ma fu di coloro che ne ereditarono lo spirito, e ne proseguirono l'opera.

È besseliano infatti lo stile delle sue ricerche, fin dalla prima, in cui Bakhuyzen studiò l'effetto della flessione sulle misure di altezze al circolo meridiano, rivelandosi valente meridianista, capace di investigare a fondo quante difficoltà non fosse bastato a Bessel il tempo per risolvere. Quella ricerca valse a Bakhuyzen l'onore di essere accolto quale assistente volontario, nel 1859, all'Osservatorio di Leida; ma non vi rimase a lungo con tale carica, bensì vi tornò direttore 13 anni dopo, nel 1872, dopo aver perfezionata la sua abilità di osservatore al Politecnico di Delft, mediante ricerche di fisica sperimentale.

Quando il circolo meridiano di Leida cominciò a funzionare nelle mani di Bakhuyzen, tutti s'accorsero che fra quanti volumi l'Astronomische Gesellschaft avrebbe consacrati al suo meraviglioso Catalogo stellare, quello di Leida sarebbe riuscito forse il più perfetto. Non era un lavorare dietro modelli o regole ricevute, quello del Bakhuyzen, ma un continuo infaticabile esercizio di autocritica.

Bakhuyzen voleva risultati esatti, e prendeva sul serio l'ultima decimale che altri ritengono solo *pro forma*, senza riuscir con ciò ad assodare nemmeno l'antipenultima. Nella misura delle differenze di ascensione retta era canone che l'equazione personale si eliminasse. Bakhuyzen non accettò quel dogma, perchè giustamente pensò che ben potrebbero i passaggi delle stelle lucide osservarsi diversamente da quelli delle stelle deboli. L'equazione personale è funzione della grandezza stellare. Tutti lo sappiamo ora che Bakhuyzen lo ha messo fuori dubbio: il quale anche s'ingegnò di determinar esperimentalmente la forma (sia pur empirica) di quella equazione. Ebbe così ideato e costrutto un apparecchio in cui i passaggi di una stella fittizia dietro i fili del micrometro, oltre che dall'osservatore che sta all'oculare, vengono anche registrati automaticamente dal telaio che porta la stella. In base a queste esperienze gli astronomi conobbero il modo come applicare ai tempi dei passaggi la cosidetta « riduzione per grandezza », senza la quale le differenze di ascension retta risulterebbero, e risultavano infatti, più o meno erronee. Ma oltre le stelle della zona di Leida, furono a cuore a Bakhuyzen le stelle circumpolari, che per la lentezza del moto apparente presentavano ancora grandi incertezze nelle ascensioni rette. Prima dell'introduzione della fotografia che ha dato il mezzo più sicuro di fissar le posizioni scambievoli di dette stelle, Bakhuyzen volle che vi si cimentasse il circolo meridiano con un impiego di precauzioni e di diligenza, quanto ne esigeva il difficile problema, in un'epoca nella quale il cosidetto « micrometro registratore » non era ancora venuto ad alleggerire lo sforzo di attenzione dell'osservatore, concentrandolo sopra un punto solo. Attorno a quest'opera delle 84 circumpolari, che è forse l'opera capitale, Bakhuyzen s'indugiò parecchi decennî, prima per osservare, poi per liberare le posizioni da tutte le possibili ed immaginabili ragioni di errore, ed Egli è morto a lavoro finito e perfezionato bensì, ma non ancora stampato.

Non aveva fretta, o Signori, il Bakhuyzen, e non gli piaceva di sostituire la quantità alla qualità della produzione scientifica. Fu questo un carattere eminente del suo spirito, che lo fa collocare fra i Maestri. La produzione frettolosa, dicevo, gli ripugnava. Uno qualunque dei suoi risultati gli doleva che l'immediato avvenire avesse dovuto trovar ragione di riformarlo. Una bella serie di osservazioni concordi, che altri avrebbe soddisfatto, non bastava mai a farlo decidere ad adottarne la media, in grazia della piccolezza del cosidetto « errore medio ». Più del piccolo errore medio in serie singole di misure, Egli agognava l'accordo fra serie diverse, ottenute in condizioni d'esame le più disparate. Per dirlo con formula più pregnante, a Bakhuyzen non bastò la *precisione*, ma volle anche e soprattutto l'*esattezza*, ossia l'assenza degli errori sistematici. Per diverse strade giunse Egli per esempio alla conoscenza del tempo di rotazione di Marte, ed il risultato del suo classico studio: $24^h\,37^m\,22^s,66$ oltre l'apparenza dell'attendibilità, data dal piccolissimo errore

medio ($0^s$,013), ne possiede la sostanza, come una delle meglio assodate costanti astronomiche.

Restano anche ammirati per lo spirito di esattezza e di precisione che li anima, i suoi lavori sulla Refrazione, sui passaggi di Venere del 1874 e 1882, sulla determinazione dell'apice del moto solare; come pure si rammenta con ammirazione per l'alto grado di praticità, il modello da lui proposto per le tavole di conversione delle coordinate sferiche in rettilinee e viceversa, col quale ultimo lavoro Egli ha lasciato un bel nome anche nell'astrografia fotografica, campo nuovo che si aprì al suo sguardo quando Egli era già vecchio, ma per cui non mancò di appassionarsi con fervore di giovane.

Da buon astronomo della scuola classica, il Bakhuyzen s'interessò immensamente dei lavori geodetici, prendendovi parte attivissima specialmente nella coordinazione delle misure europee e compensazione dei loro errori. Dai suoi calcoli risultarono le longitudini compensate della maggior parte degli osservatorî di Europa. Inoltre si occupò Egli di ricerche sulle maree, e della questione circa un possibile abbassamento del suolo in Olanda. Quando poi, dopo la scoperta italiana degli spostamenti del polo sulla superficie terrestre, fervevano le ricerche sul metodo più adatto al tracciamento della polodia, e lo stabilimento di parecchie stazioni lungo un parallelo, in ciascuna delle quali si osservassero le variazioni di latitudine, vale a dire il metodo migliore, era ancora lontano dall'essere organizzato, Bakhuyzen riuscì con un metodo molto meno perfetto, osservando cioè le variazioni della latitudine e dell'azimut di una mira terrestre, a dare un primo schizzo della polodia, senza uscire dall'osservatorio di Leida. L'astronomia pratica del secolo XIX non può vantare lavori più fini di codesto.

Bakhuyzen era fin dal 1874 membro della Commissione geodetica olandese: ne diventò più tardi segretario, ed infine presidente. Fu anche segretario perpetuo della Commissione internazionale del grado. Fu membro e spesso funzionò da presidente della Commissione della Carta del Cielo in Parigi. Appartenne alla Commissione internazionale delle Efemeridi astronomiche, e nel Consiglio dell'Associazione delle Accademie rappresentò spesso l'Accademia olandese, della quale presiedette dal 1888 al 1910 la classe matematico-fisica.

Era nato all'Aja il 2 aprile 1838: si spense a Leida l'8 gennaio 1923.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Castelnuovo presenta i libri giunti in dono, segnalando le *Commemorazioni* dei Soci Capellini, Taramelli e Issel fatte dal Socio Parona; un opuscolo del Socio Piutti: *I problemi della chimica nella Guerra e nella Pace*; varie pubblicazioni di cui hanno fatto omaggio i Corrispondenti Silvestri, Panetti e Spica. Lo stesso Segretario richiama anche

l'attenzione della Classe sul volume, *Respiration*, del professore onorario della Università di Birmingham J. S. HALDANE; e sui Resoconti delle sedute della prima Conferenza della « Unione geodetica e geofisica (Sezione Sismologia) », redatti dal Segretario E. ROBHÉ.

## COMUNICAZIONI VARIE

Il PRESIDENTE comunica che alla seduta assiste il prof. O. VEBLEN, della Università di Princeton, al quale porge il saluto cordiale dell'Accademia.

Lo stesso Presidente informa la Classe che nel prossimo mese di maggio sarà fatta a Parigi la commemorazione di PASTEUR, il quale appartenne come Socio straniero all'Accademia dei Lincei; anche la nostra Accademia non mancherà di onorare la memoria dell'illustre scienziato francese, di cui i Soci BOTTAZZI, FANO e MARCHIAFAVA ricorderanno nella prossima seduta della Classe, i grandi meriti.

Il PRESIDENTE aggiunge che è pervenuto alla Presidenza un cortese invito della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei, d'assistere a due lezioni che presso l'Accademia suddetta terrà il prof. C. DE LA VALLÉE POUSSIN sul tema: *L'approximation des fonctions de variable réelle*, e ad altre lezioni pubbliche di sintesi scientifica, le quali si chiuderanno con una commemorazione di PASTEUR illustrata dall'on. prof. ANTONINO ANILE.

G. C.